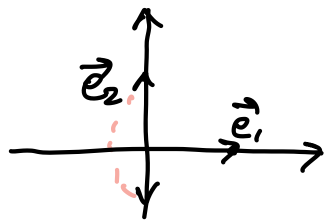
Seksjon 4.10: Egenvektorer og egenverdier

En vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ kalles en egenvektor for A $(n \times n)$ hvis det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. λ kalles for den tilhørende egenverdi

Eksempel 1: Vi ser på speilingen om linjen $y=0$, og kaller denne for T. Hva er matrisen for T?
Hvilke egenvektorer / egenverdier har vi?

Løsning:



Vi har at $\vec{e}_1 \to \vec{e}_1$
$\vec{e}_2 \to -\vec{e}_2$

Dermed blir matrisen $\left(T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)\right) = \left(\vec{e}_1 \quad -\vec{e}_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ser også at $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ er egenvektorer, med egenverdier 1, -1

Hvordan finne egenvektorer/verdier generelt?

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

Denne har løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$ hvis og bare hvis $\lambda I - A$ ikke er inverterbar

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$\det(\lambda I - A)$ kalles også $P_A(\lambda)$, det karakteristiske polynomet til A

Metoden blir:
1) Løs $P_A(\lambda) = 0$ for λ
2) Finn $\vec{x}$ ved å radredusere $\lambda I_n - A$.
$\vec{x}$ blir da egenvektor for A, egenverdi λ.

Eksempel 1 igjen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$$

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$: $\lambda_1 I_2 - A = \begin{pmatrix} -1-1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 0$
x_2 fri

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$. spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$: $\lambda_2 I_2 - A = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{x_2 = 0 \\ x_1 \text{ fri}}}$

$0 \cdot x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = 0$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$

Vi fant de samme egenvektorene over!

Eksempel 2 Hva blir egenvektorer/verdier for $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Løsning: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)((\lambda-3)^2 - 4)$

$= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)$

$(\lambda-3)^2 - 4 = 0$

$(\lambda-3)^2 = 4$

$\lambda - 3 = \pm 2$

$\lambda = 3 \pm 2$

1 eller 5

egenverdier: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.

Egenvektor for $\lambda_1 = 1$:

$\lambda_1 I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0$

$x_3 = 0$

x_2 fri

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $x_2 = 2$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2$:

$2 I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

x_3 fri

$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

$x_1 = 0$

$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0$

$x_2 = 0$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_3 = 5$:

$5 I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 - \frac{1}{2} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} x_2$

$x_3 = 0$

x_2 fri

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sjekk 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ -4+6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\lambda_1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{\lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4+6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\lambda_3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seksjon 4.11 Praktiske anvendelser

Eksempel 3: Bruke egenvektorer for å studere utviklingen av en sykdom.

Antagelser:

1) x_n / y_n antall syke / friske etter n dager

2) 1000 mennesker ($x_n + y_n = 1000$ for alle n)

3) Hvis en er syk / frisk i dag, så er det 40% / 20% sjanse for syk i morgen.

a) Finn en overgangsmatrise A s.a. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \underbrace{0.4x_n}_{\text{syke dagen før}} + \underbrace{0.2y_n}_{\text{friske dagen før.}} \\ y_{n+1} &= 0.6x_n + 0.8y_n \end{aligned} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}}_{\text{overgangsmatrise } A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Hva er egenvektorene/verdiene til A?

Løsning: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-0.4 & -0.2 \\ -0.6 & \lambda-0.8 \end{vmatrix} = (\lambda-0.4)(\lambda-0.8) - 0.12$

$= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2 = 0$

$\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 0.8}}{2}$

$= \frac{1.2 \pm 0.8}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 0.2 \quad \lambda_2 = 1$

Egenvektorer for $\lambda_1 = 0.2$:

$$0.2 I_2 - A = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.2 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 \text{ fri} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

spesiell egenvektor

Egenvektorer for $\lambda_2 = 1$:

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} x_1 - \frac{1}{3} x_2 = 0 \\ x_2 \text{ fri} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

spesiell egenvektor $\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

c) Finn et uttrykk for x_n, y_n, gitt at $x_0 = 0$, $y_0 = 1000$.

Løsning: skriv $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 4 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 250$$

Derfor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = 250 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= A^n \left(250 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\
&= 250 A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= 250 (0.2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \cdot 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\underline{250 \begin{pmatrix} 1 - (0.2)^n \\ 3 + (0.2)^n \end{pmatrix}}}
\end{aligned}$$

d) Hva skjer når $n \to \infty$?

Dette går da mot $250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 750 \end{pmatrix}$

S.a. i det lange løp er 25% syke.