Forelesning 26/2

Snublegruppe: Onsdager 1415-1600, Rom 1119 NHA

Pensum midtveis

Prøveeksamen

Seksjon 4.10 i boka forts.

Motivasjon for egenvektorene til en matrise A:

1) Gjør det lettere å forstå hva A gjør.
2) Gjør det lettere å regne med A.

> Kan vi alltid uttrykke alle vektorer ved hjelp av egenvektorene til A?
>
> **Setning 4.10.4:** Ja, hvis alle egenverdiene til A er forskjellige

Bevis: Anta $v_1, \dots, v_k$ er egenvektorer med egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$

Anta disse er lin. avh., og anta at vi har en lin.avh. relasjon

$c_1 v_1 + \dots + c_k v_n = 0$ med færrest mulig elementer (spesielt $c_i \neq 0$)

gang med $-\lambda_1$

Gang med A: $A(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) = 0$

$$= \cancel{c_1 \lambda_1 v_1} + \dots + c_k \lambda_k v_k$$

$$-\cancel{c_1 \lambda_1 v_1} - \dots - c_k \lambda_1 v_k = 0$$

trekk fra hverandre

$$\underbrace{c_2(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2 + \dots + \underbrace{c_k(\lambda_k - \lambda_1)}_{\neq 0} v_k = 0$$

Fikk nå et mindre sett med lin. avh. vektorer, som er en motsigelse.
Det følger at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lin. uavh. ■

Hva hvis noen av egenverdiene er like?

Eksempel 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Vi får $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3 + 4$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Vi har at $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Egenvektor(er) for $\lambda_1 = -1$:

$$-I - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\} \; x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ gen. egenvektor: $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

spes. egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er eneste egenvektor, så kan ikke uttrykke alle vektorer med egenvektorer.

Eksempel 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$$

$$\Downarrow$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

eneste egenverdi.

Egenvektor for $\lambda = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 frie variable, alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorer.

Så her kan alle vektorer uttrykkes ved egenvektorer.

Komplekse egenverdier

Vi ser på $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 8 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = -16$$

$$\lambda = 2 \pm 4i$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 2 + 4i$: $\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 4i & 8 \\ -2 & 4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\}$

$x_1 - 2i x_2 = 0$

$x_1 = 2i x_2$

egenvek.: $\begin{pmatrix} 2i x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2 - 4i$: $\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -4i & 8 \\ -2 & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\}$

$x_1 + 2i x_2 = 0$

egenvek $\begin{pmatrix} -2i x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setning 4.10.8: Anta A reell matrise, λ kompleks egenverdi, $\vec{x}$ kompleks egenvektor.

Da er $\bar{\lambda}$ også egenverdi, med $\bar{\vec{x}}$ som egenvektor.

Bevis: Anta $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Da er

$$\overline{A\vec{x}} = \overline{\lambda\vec{x}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\bar{A}\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{A\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}}_{\bar{\lambda} \text{ egenverdi med egenvektor } \bar{\vec{x}}}$$

■

En matrise kalles symmetrisk hvis $A = A^T$

Teorem 4.10.10 Symmetriske $n \times n$ matriser har n reelle egenverdier, og de tilhørende egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^n$.

A i eksempel 2: var symmetrisk, fant basis av egenvektorer.
A i eksempel 1: var ikke symmetrisk, hadde ikke slik basis.

Matriser med egenvektorer som danner en basis for $\mathbb{R}^n$, slik som de symmetriske matrisene, lar seg diagonalisere:

Vi kan finne en inverterbar M s.a. $A = MDM^{-1}$, der $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

A's egenverdier.

Bevis for at matriser der egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^n$ er diagonaliserbare:

A's egenvektorer
inverterbar

Bevis: Sett $M = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$. Da er $M\vec{e}_i = \vec{v}_i$, $M^{-1}\vec{v}_i = \vec{e}_i$

$$MDM^{-1}\vec{v}_i = MD\vec{e}_i = \lambda_i M\vec{e}_i = \lambda_i\vec{v}_i = A\vec{v}_i$$

Derfor er $MDM^{-1}\vec{x} = A\vec{x}$ for alle $\vec{x}$, og da er $MDM^{-1} = A$.

Diagonalisering er nyttig av to grunner:

1) $$A^m = (MDM^{-1})^m = M\underbrace{DM^{-1}MD}M^{-1}\cdots MDM^{-1}$$
$$= MDD\cdots DM^{-1} = MD^mM^{-1}$$
enklere å regneut.

2) $$\det A = \det(MDM^{-1}) = \cancel{\det(M)}\det(D)\underbrace{\det(M^{-1})}_{=1/\det(M)} = \det(D) = \lambda_1\cdots\lambda_n$$

Kap. 6: Integrasjon av funksjoner i flere variable:

Vi lærer først å integrere over rektangler i $\mathbb{R}^n$, som er på formen

$$R = \{(x_1,\dots,x_n):\ a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\}$$

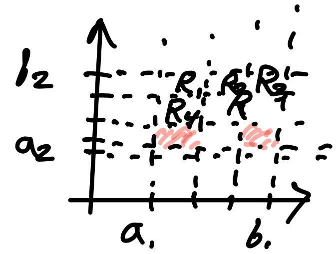
Vi skriver også $R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$

I $\mathbb{R}^2$ så er arealet av R lik $|R| = (b_1-a_1)(b_2-a_2)$

Mer generelt, vi sier at volumet av R er $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$.

For å integrere en begrenset funksjon over R:

1) Lag en partisjon Π av R: mindre rektangler $R_1,\dots,R_k$ ved å partisjonere hver akse:



2) Sett $m_i = \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x}\in R_i\}$

$M_i = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x}\in R_i\}$

$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} m_i |R_i|$ (kalles nedre trappesum)

$Ø(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} M_i |R_i|$ (kalles øvre trappesum)

3) Lag et utplukk U for Π: Et punkt $\vec{c}_i \in R_i$ for hver i.

4) Riemannsummen for Π og U er definert ved $R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{k} f(\vec{c}_i)|R_i|$

Vi har at $N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq \Phi(\Pi)$

Merk: $N(\Pi)$ og $\Phi(\Pi)$ tilnærmer "volumene" over R

Definisjon 6.1.1 Vi definerer

øvreintegralet : $\overline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \inf(\Phi(\Pi),\ \Pi \text{ partisjon av } R)$

nedre integralet : $\underline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \sup(N(\Pi),\ \Pi \text{ partisjon av } R)$

Er disse like så sier vi at f er integrerbar på R, og vi definerer

$$\iint_R f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

for den felles verdien

Setning 6.1.5: Alle kontinuerlige funksjoner på R er integrerbare på R.

Setning 6.1.6: Anta at $\{\Pi_n\}$ er en følge av partisjoner s.a.

maskevidden $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$. La U_n være utplukk for Π_n

generalisert fra Kalkulus

For alle kontinuerlige f er da $\int \cdots \int_R f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \lim_{n \to \infty} R(\Pi_n, U_n)$.