Seksjon 6.1 forts.

Setning 6.1.2: Kjente regneregler gjelder, slik som

$$\int\cdots\int_R \left(af(\vec{x}) + bg(\vec{x})\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= a \int\cdots\int_R f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n + b \int\cdots\int_R g(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

Setn. 6.1.9 Grenser kan byttes om: Hvis $R = [a,b] \times [c,d]$, så er

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy$$

Eksempel 1 Hva blir $I = \iint_R (x^2 + xy^3)\, dx\, dy$, der $R = [0,1] \times [0,2]$?

Løsning:

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2 + xy^3)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{4} x y^4 \right]_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + 4x)\, dx = \left[\tfrac{2}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^1 = \tfrac{2}{3} + 2 = \underline{\tfrac{8}{3}}$$

Ved å bytte om rekkefølge:

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^1 (x^2 + xy^3)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 y^3 \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} y^3 \right) dy = \left[\tfrac{1}{3} y + \tfrac{1}{8} y^4 \right]_0^2 = \tfrac{2}{3} + 2 = \underline{\tfrac{8}{3}}$$

Multiple integraler over begrensede områder

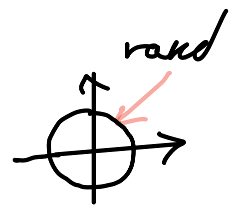
La
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ begrenset
- R rektangel s.a. $A \subseteq R$
- $f_A(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & x \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ utvidelse av f til et rektangel.

Hvis f_A er integrerbar på R, så sier vi at <u>f er integrerbar på A</u>, og skriver

$$\int_A \cdots \int f(\vec{x})\,dx_1 \cdots dx_n = \int_R \cdots \int f_A(\vec{x})\,dx_1 \cdots dx_n$$

Problem: f_A er typisk ikke kontinuerlig på R, så er kanskje ikke integrerbar der heller.

Men: Hvis A er lukket (dvs. inneholder sin rand (δA)),



slik som $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

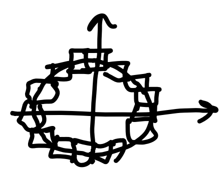
$\delta A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

og Jordanmålbar (dvs. $1_A\, x = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ er integrerbar på A)

så er enhver kontinuerlig funksjon: $f: A \to \mathbb{R}$ integrerbar på A.

Merk:
1) "Alle våre A" er lukkede og Jordanmålbare.
2) Teorem 6.6.3: A Jordanmålbar $\Leftrightarrow$ δA har innhold 0

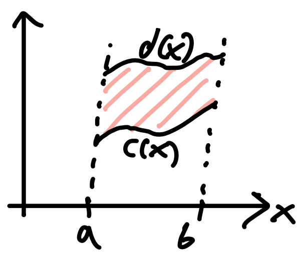
   (innhold 0: kan dekke randen δA med rektangler R_i s.a. $\sum |R_i| \leq \varepsilon$ for alle ε.



3) Setning 6.6.5 sier at type I – og type II områder er Jordanmålbare

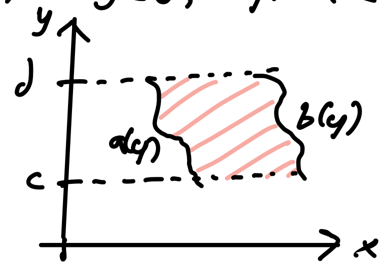
type-I område

$A = \{ (x,y) : a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x) \}$



type-II område

$A = \{ (x,y) : c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y) \}$



Prosedyre for å regne ut $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$:

1) Tegn opp A

2) Velg et koordinatsystem (u,v) s.a. $A = \{ (u,v) : a \le u \le b,\ c(u) \le v \le d(u) \}$

der c og d er kontinuerlige funksjoner.

Hvis ikke dette går: "split opp området" i mindre biter

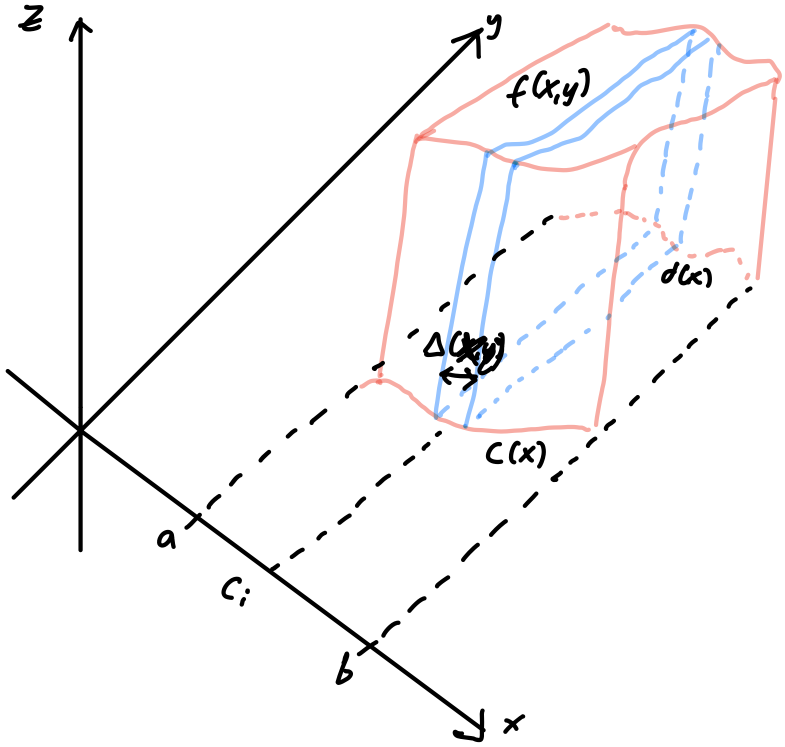
3) Regn ut Jacobideterminanten $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

(trenger (x,y) uttrykt ved (u,v) her..
Dette skrives $(x,y) = \vec{T}(u,v)$)

4) Regn ut $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{c(u)}^{d(u)} f(\vec{T}(u,v))\,|J|\,dv \right] du$

kommer inn som forstørrelsesfaktor også her, som i Kap. 1 ?

Illustrasjon av et type-I område



I blått: E tverrsnitt med bredde Δx, ($x = c_i$

Areal tverrsnitt: $\displaystyle\int_{c(x)}^{d(x)} f(c_i, y)\,dy$, kaller denne for $A(c_i)$

Volum av tverrsnitt: $A(c_i)\Delta x_i$

Splitter opp volumet i mange tverrsnitt, og legger sammen disse volumene. Vi får:

$$\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i \quad \text{som er en Riemannsum for}$$

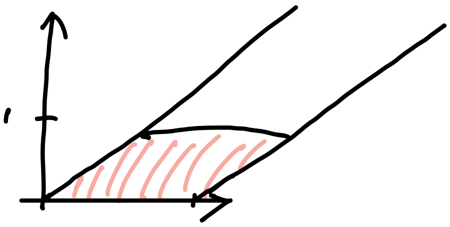
$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right] dx ,$$

som blir volumet over A.

Eksempel 2:

Regn ut $\iint_A xy^2\,dx\,dy$, der A er området beskrevet ved $0 \le y \le 1$, $\underbrace{y}_{a(y)} \le x \le \underbrace{y+2}_{b(y)}$

Løsning:



Området er type II

$$I = \int_0^1 \left[\int_y^{y+2} xy^2\,dx \right] dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_y^{y+2} dy = \int_0^1 \tfrac{1}{2} y^2 \left((y+2)^2 - y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{2} y^2 (4y+4)\,dy = \int_0^1 (2y^3 + 2y^2)\,dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} y^4 + \tfrac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} = \underline{\tfrac{7}{6}}$$

Eksempel 2 med koordinatskifte:

$$\underbrace{0 \le y \le 1 \qquad y \le x \le y+2}$$

$$0 \le \underbrace{y}_{u} \le 1 \qquad 0 \le \underbrace{x-y}_{v} \le 2$$

Området blir $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$, med $u = y$, $v = x - y$

Trenger x, y uttrykt ved u, v:

$$x = v + y = u + v$$
$$y = u$$

$$\vec{T}(u,v) = (\underbrace{u+v}_{x}, \underbrace{u}_{y})$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad |J| = 1$$

setter inn i formel

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^2 xy^2 |J|\,dv \right] du$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^2 (u+v) u^2\,dv \right] du$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^2 (u^3 + u^2 v)\, dv \right] du$$

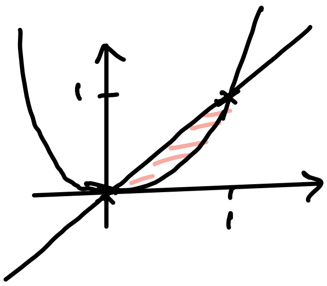
$$= \int_0^1 \left[u^3 v + \tfrac{1}{2} u^2 v^2 \right]_0^2 du$$

$$= \int_0^1 (2u^3 + 2u^2)\, du$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} u^4 + \tfrac{2}{3} u^3 \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} = \underline{\tfrac{7}{6}}$$

Eksempel 3 Regn ut $\iint_A (2xy + 2x)\, dx\, dy$ der A er området avgrenset av $y = x$ og $y = x^2$.

Løsning:



Området kan skrives:

type I: $0 \le x \le 1 \qquad x^2 \le y \le x$

type II: $0 \le y \le 1 \qquad y \le x \le \sqrt{y}$

Som type I: $$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (2xy + 2x)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy^2 + 2xy \right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - x^5 - 2x^3)\, dx = \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^5)\, dx$$

$$= \left[\tfrac{2}{3} x^3 - \tfrac{1}{4} x^4 - \tfrac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = \underline{\tfrac{1}{4}}$$

Som type II: $$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} (2xy + 2x)\, dx \right] dy = \int_0^1 \left[x^2 y + x^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 (\cancel{y^2} + y - y^3 - \cancel{y^2})\, dy = \int_0^1 (y - y^3)\, dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \underline{\tfrac{1}{4}}$$

Eksempel 4: Polarkoordinater

Her er $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\vec{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

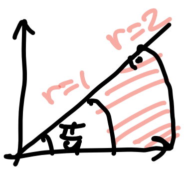
$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\Downarrow$$

$|J| = r$ i polarkoordinater.

Eksempel 4 Finn $\iint_A (\overset{r^2}{x^2+y^2})\,dx\,dy$ når A er området avgrenset av $x \geq 0$, $\underbrace{1 \leq x^2+y^2 \leq 4}_{1 \leq r \leq 2}$, og av $\underbrace{y \geq x}_{\theta = \frac{\pi}{4}}$

Løsning:



$$I = \int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 r \, d\theta\right] dr = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 \left[r^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^2 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2$$

$$= \frac{\pi}{16}(16-1) = \frac{15}{16}\pi$$