Seksjon 5.1 Litt topologi i $\mathbb{R}^m$

- $B(\vec{a},r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x}-\vec{a}| < r\}$ (åpen kule om $\vec{a}$ med radius r)
- $\bar{B}(\vec{a},r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x}-\vec{a}| \leq r\}$ (lukket kule om $\vec{a}$ med radius r)
- $\emptyset$: den tomme mengde

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$. $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ kalles

- Indre punkt for A hvis en finnes en kule $B(\vec{a},r)$ inneholdt i A.
- Randpunkt for A hvis enhver kule $B(\vec{a},r)$ inneholder punkter både i A, og punkter ikke i A.
- ytre punkt for A hvis det finnes en kule $B(\vec{a},r)$ som ikke inneholder noen punkter fra A.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ kalles

- Lukket hvis den inneholder alle sine randpunkter.
- Åpen hvis den ikke inneholder noen randpunkter

Definisjon 5.1.4: Vi sier at følgen $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^m$ hvis for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.
Vi skriver da også $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$, eller bare $\vec{x}_n \to \vec{a}$.

Setning 5.1.5 sier at, hvis $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ og $\lim \vec{y}_n = \vec{y}$, så har vi at

(i) $\lim_{n\to\infty} c\vec{x}_n = c \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) = \vec{x} + \vec{y}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (\vec{x}_n - \vec{y}_n) = \vec{x} - \vec{y}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} (\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

Bevis (iv): Vi må vise at, for enhver ε, så kan vi finne en N s.a.

$$|\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y}| < \varepsilon \quad \text{for } n \geq N$$

Skriv:
$$|\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y}| = |(\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y}_n) + (\vec{x} \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y})|$$
$$\overset{\text{trekantu.}}{\leq} |\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y}_n| + |\vec{x} \cdot \vec{y}_n - \vec{x} \cdot \vec{y}|$$

$$= |\vec{y}_n \cdot (\vec{x}_n - \vec{x})| + |\vec{x} \cdot (\vec{y}_n - \vec{y})|$$

CS

$$\leq \underbrace{|\vec{y}_n||\vec{x}_n - \vec{x}|}_{\text{vil ha } < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\underbrace{|\vec{x}||\vec{y}_n - \vec{y}|}_{\text{vil ha } < \frac{\varepsilon}{2}}}_{\text{OK hvis } \vec{x} = \vec{0}} \quad \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right)$$

...

anta $\vec{x} \neq 0$. Velg N s.a. $|\vec{y}_n - \vec{y}| < \frac{\varepsilon}{2|\vec{x}|}$ når $n \geq N$

Da er

$$|\vec{x}||\vec{y}_n - \vec{y}| < \cancel{|\vec{x}|}\frac{\varepsilon}{2\cancel{|\vec{x}|}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Setning 5.1.6

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$$

komponent i i $\vec{x}_n$ komponent i i $\vec{x}$.

Bevis $\Uparrow$: $|\vec{x}_n - \vec{x}| = \sqrt{(x_1^{(n)} - x_1)^2 + \cdots + (x_m^{(n)} - x_m)^2}$

velg N så stor at $|x_i^{(n)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ for alle i, $n \geq N$. Da er

(finnes slik N siden $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$)

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - x_1)^2 + \cdots + (x_m^{(n)} - x_m)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Setning 5.1.8 Hvis A er lukket og $\vec{x}_n$ er en følge fra A s.a. $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, så er også $\vec{x} \in A$.

Bevis: Hvis $\vec{x} \notin A$ så er $\vec{x}$ et ytre punkt, s.a. det finnes en kule $B(\vec{x}, r)$ som ikke inneholder noe punkt fra A.
Det finnes og en N s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}| < r$ for alle $n \geq N$.
Da er $\vec{x}_n \in A$, og $\vec{x}_n \in B(\vec{x}, r)$, som ikke er i A.

Dette er en motsigelse, slik at $\vec{x} \in A$ ∎

Setning 5.1.9 Anta $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in A \subseteq \mathbb{R}^k$. Da gjelder

$\vec{F}$ kont. i $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \vec{F}(\vec{x}_n) = \vec{F}(\vec{a})$ for alle følger s.a. $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$

Bevis: $\Downarrow$: Anta $\vec{F}$ kont. i $\vec{a}$, og at $\vec{x}_n \to \vec{a}$

Må vise: For enhver $\varepsilon > 0$ finnes N s.a. $|\vec{F}(\vec{x}_n) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$, $n \geq N$

$\vec{y} = \vec{x}_n$

Siden $\vec{F}$ er kont. i $\vec{a}$: Finnes $\delta > 0$ s.a. $|F(\vec{y}) - F(\vec{a})| < \varepsilon$ når $|\vec{y} - \vec{a}| < \delta$

Siden $\vec{x}_n \to \vec{a}$: Finnes en N s.a. $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \delta$ for $n \geq N$.

For $n \geq N$: $|F(\vec{x}_n) - F(\vec{a})| < \varepsilon \Rightarrow F(\vec{x}_n) \to \vec{F}(\vec{a})$ ∎

Seksjon 5.2 Komplethet av $\mathbb{R}^m$.

Hvis $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$ og $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, så kalles følgen $\{\vec{x}_{n_k}\}$ for en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$.

Setning 5.2.2 sier at hvis $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$, så konvergerer også alle delfølger av $\{\vec{x}_n\}$ mot $\vec{x}$.

Teorem 5.2.3 Bolzano Weierstrass:

Alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

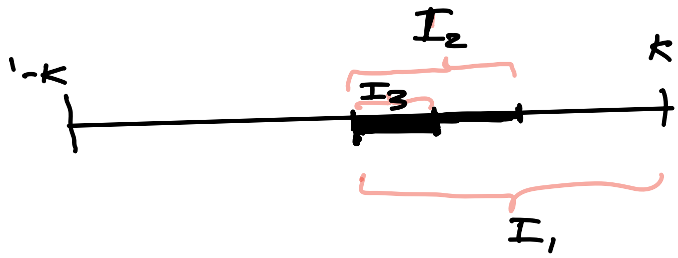
Bevis: Anta $|\vec{x}_n| \leq K$, K gitt tall

Da har vi også at $|x_i^{(n)}| \leq K$, for alle i, n. Fiksér i:

- En av $[-K, 0]$ og $[0, K]$ må inneholde uendelig mange tall fra $\{x_i^{(n)}\}$. Kall dette intervallet for I_1.

- Del I_1 i to like store deler. En av disse må også inneholde uendelige mange tall fra $\{x_i^{(n)}\}$. Kall denne delen for I_2
- Fortsett slik, og få intervaller $I_3, I_4, \dots,$ alle med uendelig mange tall fra $\{x_i^{(n)}\}$.

Velg $y_1 = x_{n_1}$ fra følgen, og $y_i^{(1)} \in I_1$
$y_2 = x_{n_2}$ fra følgen, og $y_i^{(2)} \in I$
$\vdots$
$y_k = x_{n_k}$ fra følgen, og $y_i^{(k)} \in I_k$



Hvis $I_n = [a_k, b_k]$, så er $-k \leq a_k, b_k \leq k$

a_k er oppad begrenset og voksende, $|b_k - a_k| \leq \frac{2k}{2^k}$

velg k så stor at $\frac{2k}{2^k} < \varepsilon$

Teorem 4.3.9 i Kalkulus: $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, der a er et tall. $(a \geq a_k)$

Vi har at: $|y_i^{(k)} - a| \leq |b_k - a_k| < \varepsilon$ s.a. $y_i^{(k)} \to a$ når $k \to \infty$.

Fra y_k kan man lage en ny delfølge som også konvergerer i en annen komponent, o.s.v.

Setning 5.1.6 sier at denne følgen konvergerer, siden alle komponentene konvergerer.

$\{\vec{x}_n\}$ kalles en Cauchyfølge hvis, for hver ε, finnes en N s.a.

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon \quad \text{for alle } k, n \geq N.$$

Teorem 5.2.6 / 5.2.7 $\{\vec{x}_n\}$ Cauchyfølge)

$$\Updownarrow$$

$\{\vec{x}_n\}$ konvergent.

Bevis $\Uparrow$: Anta $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$. Da finnes N s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$

For $n,k \geq N$: $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| = |(\vec{x}_n - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x}_k)|$

$$\overset{\text{tr. ulikhet}}{\leq} |\vec{x}_n - \vec{x}| + |\vec{x} - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Det følger at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchyfølge.

$\Downarrow$: Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchyfølge

Finnes N s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $n,k \geq N$.

Da er $\{\vec{x}_n\}$ begrenset:

$|\vec{x}_n - \vec{x}_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $n \geq N$ s.a.

$$|\vec{x}_n| = |(\vec{x}_n - \vec{x}_N) + \vec{x}_N| \leq |\vec{x}_n - \vec{x}_N| + |\vec{x}_N|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\vec{x}_N|$$

Resten av beviset: Bolzano Weierstrass sier nå at $\{\vec{x}_n\}$ har en konvergent delfølge, som vi jobber videre på.

$\blacksquare$