Seksjon 5.4 Iterasjon av funksjoner

Anta $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Hvis $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ defineres vi følgen $\{\vec{x}_n\}$ ved at $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$.

Fra sek. 4.10/4.11: Når $\vec{F}$ var lineær kunne vi finne $\vec{x}_n$ ved å finne en dekomposisjon av $\vec{x}_0$ v.h.a. egenvektorer.

Eksempel 5.4.1: La x_n være antall byttedyr i en dyrebestand
y_n være antall rovdyr
etter n år.

Vi ser på modellen:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - bx_ny_n \\ y_{n+1} &= \underbrace{cy_n}_{\substack{\text{naturlig tilskudd} \\ \text{fødsel/død.}}} + \underbrace{dx_ny_n}_{\substack{\text{antall tilfeldige møter mellom} \\ \text{rovdyr og byttedyr}}} \end{aligned}\right\} \vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

ser fra figur: min byttedyr "omtrent" når maks rovdyr.

Seksjon 5.5 Konvergens mot et fikspunkt.

En $\vec{x}$ s.a. $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$ kalles en likevektstilstand for $\vec{F}$, eller et fikspunkt for $\vec{F}$.

Vi er ofte interessert i å vite om $\vec{x}_n$ konvergerer mot en likevektstilstand.

Likevektstilstand for eksempel 5.4.1

For hvilke x, y har vi at

$$\left.\begin{aligned} x &= ax - bxy \\ \underbrace{y}_{y_{n+1}} &= c\underbrace{y}_{y_n} + d\underbrace{xy}_{x_ny_n} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 1 &= a - by \\ 1 &= c + dx \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= \frac{a-1}{b} = \frac{1.01-1}{3\cdot 10^{-5}} \approx \underline{333} \\ x &= \frac{1-c}{d} = \frac{1-0.98}{10^{-5}} = \underline{2000} \end{aligned}$$

Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{F}: A \to A$, $0 < C < 1$.

Hvis $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C\,|\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$, så kalles $\vec{F}$ en kontraksjon, og C en kontraksjonsfaktor

Merk: Kontraksjoner er kontinuerlige (sett $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$), og

$$|\vec{F}(\vec{x}_{n+1}) - \vec{F}(x_n)| \leq C^n |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \qquad (*)$$

Teorem 5.5.4 Banachs fikspunktsteorem

Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er ikketom, lukket, og $\vec{F}$ en kontraksjon med kontraksjonsfaktor C. Da har vi

- $\vec{F}$ har nøyaktig ett fikspunkt $\vec{x}$
- Uansett $\vec{x}_0$, så vil $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots$ konvergere mot $\vec{x}$
  $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$
- $|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$ (feilestimat)

Bevis: Viser først at er max. ett fikspunkt.

anta for motsigelse at $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$, $\vec{F}(\vec{y}) = \vec{y}$, der $\vec{x} \neq \vec{y}$.

Da er:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C\,|\vec{x} - \vec{y}|$$

del med $|\vec{x} - \vec{y}| \neq 0$:

$$1 \leq C, \text{ som motsier at } 0 < C < 1.$$

Viser nå at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchyfølge, og dermed konvergerer.

Anta $n < k$

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| = |(\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}) + (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}) + \cdots + (\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k)|$$

$$\overset{\text{tr. ulikhet}}{\leq} |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}| + \cdots + |\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k|$$

$$\overset{(*)}{\leq} C^n |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| + C^{n+1} |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| + \cdots + C^{k-1} |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$$

$$= (C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{k-1})\, |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$$

$$= \frac{c^n(1-c^{k-n})}{1-c}|\vec{x}_1-\vec{x}_0|$$

$$\leq \underbrace{\frac{c^n}{1-c}}|\vec{x}_1-\vec{x}_0|$$

kan få $<\varepsilon$ ved å velge n stor nok $\left(\frac{c^n}{1-c}<\varepsilon\right)$

Derfor er $\{\vec{x}_n\}$ en Cauchyfølge. Sett $\vec{x}=\lim_{n\to\infty}\vec{x}_n$.

Siden $\vec{F}$ er kontinuerlig:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\lim_{n\to\infty}\vec{x}_n) = \lim_{n\to\infty}\vec{F}(\vec{x}_n) = \lim_{n\to\infty}\vec{x}_n = \vec{x}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ konvergerer mot et fikspunkt.

Feilestimat: La $k\to\infty$ i $|\vec{x}_n-\vec{x}_k| \leq \frac{c^n}{1-c}|\vec{x}_1-\vec{x}_0|$

$$|\vec{x}_n-\vec{x}| \leq \frac{c^n}{1-c}|\vec{x}_1-\vec{x}_0|$$

■

Setning 5.5.6 Middelverdisetningen i flere variable

Anta $A \subseteq \mathbb{R}^m$, og $f: A\to\mathbb{R}$ deriverbar i området som inneholder linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
Det finnes en $\vec{c}$ på dette linjestykket s.a.

$$f(\vec{b})-f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Bevis (se kap.3):

En parametrisering av linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})}, \quad 0\leq t\leq 1 \quad \begin{pmatrix}\vec{r}(0)=\vec{a}\\ \vec{r}(1)=\vec{b}\end{pmatrix}$$

Definer $g: [0,1]\to\mathbb{R}$ ved at $g(t) = f(\vec{r}(t))$

$a_i + t(b_i-a_i)$ ↓ deriverer b_i-a_i

Kjerneregelen gir:

$$g'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{r}(t))\right)\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ \vdots \\ x_m'(t)\end{pmatrix} = \nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t))\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

Vi bruker middelverdisetningen i 1 variabel på $g(t)$ på $[0,1]$

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0} = \underset{\text{mellom } 0 \text{ og } 1}{g'(c')} = \nabla f(\overbrace{\vec{r}(c')}^{\vec{c}}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$$

$$f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$$

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a}) \quad \blacksquare$$

Setning 5.5.7 Anta $A \subseteq \mathbb{R}^m$, og $\vec{F}$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.
Det fins da punkter $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$ på dette linjestykket s.a.

$$|\vec{F}(\vec{b}) - \vec{F}(\vec{a})| \leq |\vec{b}-\vec{a}| \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2}$$

(F_i er kompontene til $\vec{F}$)

Bevis: Bruk setn 5.5.6 på alle komponentene til $\vec{F}$:
Det finnes da en $\vec{c}_i$ på linjestykket s.a.

$$|F_i(\vec{b}) - F_i(\vec{a})| = |\nabla F_i(\vec{c}_i)(\vec{b}-\vec{a})|$$

$$\overset{CS}{\leq} |\nabla F_i(\vec{c})| \, |\vec{b}-\vec{a}|$$

Vi får:

$$|\vec{F}(\vec{b}) - \vec{F}(\vec{a})| = \sqrt{|F_1(\vec{b}) - F_1(\vec{a})|^2 + \dots + |F_m(\vec{b}) - F_m(\vec{a})|^2}$$

$$\leq \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 |\vec{b}-\vec{a}|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2 |\vec{b}-\vec{a}|^2}$$

$$= |\vec{b}-\vec{a}| \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2} \quad \blacksquare$$

Setning 5.5.8 Anta $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikketom, lukket, $\overbrace{\text{konveks}}^{\text{inneholder alltid linjestykket mellom to punkter i } A.}$

Anta $\vec{F}: A \to A$ er deriverbar, og det finnes $C<1$ s.a.

$$\sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2} \leq C \quad \text{for alle } c_1, \dots, c_m \in A$$

Da er $\vec{F}$ en kontraksjon med kontraksjonsfaktor C:

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C \, |\vec{x}-\vec{y}|$$