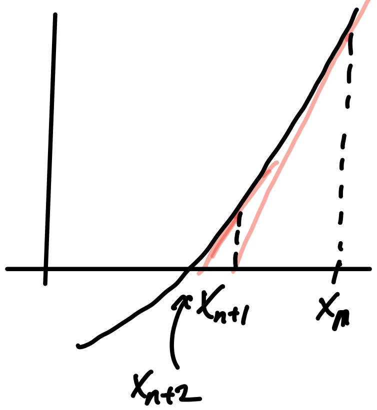
Seksjon 5.6 Newtons metode i flere variable

Newtons metode i en variabel: Bruk skjæringen til tangenten med x-aksen som tilnærming til ett nullpunkt vi leter etter.



Tangenten til f i $(x_n, f(x_n))$:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

settes til 0:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

setter som x_{n+1}.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Hvis $\vec{F}: A \to A$, der $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{F}$ deriverbar, $\vec{F}'$ inverterbar:

Ved å erstatte tangent med linearisering:

$$\vec{0} = T_{\vec{x}_n}(\vec{F}) = \vec{F}(\vec{x}_n) + \vec{F}'(\vec{x}_n)(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

Løser: $\vec{x} = \vec{x}_n - (\vec{F}'(\vec{x}_n))^{-1}\vec{F}(\vec{x}_n)$

setter som $\vec{x}_{n+1}$.

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - (\vec{F}'(\vec{x}_n))^{-1}\vec{F}(\vec{x}_n)$$

kalles Newtons metode i m variable.

Kan tenkes på som iterasjon av $\vec{G}(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1}\vec{F}(\vec{x})$.

Teorem 5.6.4 - 5.6.6 (Kantorovitsj teorem)

La $\vec{F}: U \to \mathbb{R}^m$, der $U \subseteq \mathbb{R}^m$ er åpen, konveks, $\vec{F}$ deriverbar. Anta vi kjører Newtons metode med startverdi $\vec{x}_0$. Anta og

- $|\vec{F}'(\vec{x}) - \vec{F}'(\vec{y})| \leq M|\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x}, \vec{y} \in U$

operatornorm: $|A| = \sup\left\{\frac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|}, \vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{x} \neq \vec{0}\right\}$

M, K er gitte konstanter

- $\vec{F}'(\vec{x}_0)$ er inverterbar og $|(\vec{F}'(\vec{x}_0))^{-1}| \leq K$
- $\bar{B}(\vec{x}_0, \frac{1}{KM}) \subseteq U$
- $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| = |(\vec{F}'(\vec{x}_0))^{-1} \vec{F}(\vec{x}_0)| \leq \frac{1}{2KM}$

Da har vi at

1) $\vec{F}'(\vec{x})$ er inverterbar for alle $\vec{x} \in \bar{B}(\vec{x}_0, \frac{1}{KM})$

2) Alle $\vec{x}_n \in \bar{B}(\vec{x}_0, \frac{1}{KM})$

3) $\vec{x}_n \to \vec{x}$ der $\vec{x} \in \bar{B}(\vec{x}_0, \frac{1}{KM})$, og $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$

4) $\vec{x}$ er det eneste nullpunktet til $\vec{F}$ i $\bar{B}(\vec{x}_0, \frac{1}{KM})$

5) Hvis $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2KM}$ så har vi (feilestimat)

$$|\vec{x} - \vec{x}_n| \leq \frac{1}{KM} \underbrace{\left[\frac{(1-\sqrt{1-2h}\,)^{2^n}}{2^n} \right]}_{\text{går fort mot } 0.} \quad \text{der } h = KM\varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

Eksempel 5.6.2 Vi har $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y+1 \\ e^x+y \end{pmatrix}$

Kjør Newtons metode med $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}$ for å finne et nullpunkt

Løsning: Vi har $\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$

Newtons metode tar formen:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_ny_n & x_n^2 \\ e^{x_n} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_n^2y_n+1 \\ e^{x_n}+y_n \end{pmatrix}$$

Vi kjører ti iterasjoner i Matlab:

Seksjon 5.7: Omvendte og implisitte funksjoner

Anta $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Vi skriver $D_{\vec{F}}$ for definisjonsmengden til $\vec{F}$, og

$V_{\vec{F}}$ for verdimengden til $\vec{F}$: $\{ F(\vec{x}), \vec{x} \in D_{\vec{F}} \}$

Vi sier at $\vec{F}$ er injektiv hvis, for alle $\vec{y} \in V_{\vec{F}}$, finnes nøyaktig en $\vec{x} \in D_{\vec{F}}$ s.a. $F(\vec{x}) = \vec{y}$.

Hvis $\vec{F}$ er injektiv definerer vi den omvendte funksjonen
$\vec{G}: V_{\vec{F}} \to D_{\vec{F}}$ ved at $\vec{G}(\vec{y}) = \vec{x}$ når $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$.
Vi skriver $\vec{F}^{-1}$ for $\vec{G}$.

- Anta $U_0 \subseteq D_{\vec{F}}$. Restriksjonen av $\vec{F}$ til U_0 er $\vec{F}$ med definisjonsmengde innskrenket til U_0
- Vi sier at U_0 er en omegn om $\vec{x}$ dersom $\vec{x}$ er et indre punkt i U_0.

Teorem 5.7.2 Omvendt funksjonsteorem
Anta $U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, $\vec{F}: U \to \mathbb{R}^m$ kont. part. der.,
$\vec{F}'(\vec{a})$ inverterbar, $\vec{a} \in U$
Da finnes en omegn U_0 om $\vec{a}$, og en omegn V_0 om $\vec{F}(\vec{a})$,
slik at restriksjonen $\vec{F}: U_0 \to V_0$ har en omvendt funksjon $\vec{G}: V_0 \to U_0$,
som er deriverbar på V_0. Videre er $\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1}$, $\vec{x} \in U_0$.

Bevis for at $\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1}$:

Siden $\vec{G}(\vec{F}(\vec{x})) = \vec{x}$, $\vec{x} \in U_0$, så er Jacobimatrisene til VS og HS like:

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x}))\vec{F}'(\vec{x}) = I$$

gang med invers Jacobi begge sider, til høyre

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1} \blacksquare$$

Eksempel 1 Vis at $\vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x^2 + 3e^y\\ \sin x + y\end{pmatrix}$ har en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $(3e, 1)$ slik at $\vec{G}\begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Hva er $\vec{G}'\begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix}$?

Løsning: Vi har at $\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 0 + 3e^1\\ \sin 0 + 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x & 3e^y\\ \cos x & 1\end{pmatrix}, \text{ og } \vec{F}'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3e\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Denne er inverterbar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 3e & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{3e} & 1\\0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0\end{array}\right)$$

Derfor er $\left(\vec{F}'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3e} & 1 \\ \frac{1}{3e} & 0 \end{pmatrix} = \vec{G}'\begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix}$

Siden $\vec{F}'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ er inverterbar i en omegn om U, så har $\vec{F}$ en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix}$, slik at $\vec{G}\begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, og $\vec{G}'\begin{pmatrix}3e\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3e} & 1 \\ \frac{1}{3e} & 0 \end{pmatrix}$