Seksjon 5.7 forts.

Implisitt funksjonsteorem

Hvis $f(x,y)=0$ har en entydig løsning $y=g(x)$ så sier vi at y er implisitt definert (ved $f(x,y)$)

Eksempel: $f(x,y) = x^3+y^3-1=0$ (svarer til $x^3+y^3=1$)

Denne definerer y implisitt (siden $y = \underbrace{\sqrt[3]{1-x^3}}_{g(x)}$)

Teorem 5.7.4 Implisitt funksjonsteorem

Antat

1) $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$
2) $f: U \to \mathbb{R}$ kont. part. der. (skriver $f(\underbrace{x_1,\dots,x_m}_{\vec{x}},y)$, eller $f(\vec{x},y)$ for f)
3) $(\vec{a},b) \in U$ er slik at $f(\vec{a},b)=0$
4) $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a},b) \neq 0$

Da har vi at

1) Det finnes en omegn U_0 om $\vec{a}$ slik at, for hver $\vec{x} \in U_0$ finnes et entydig bestemt tall $g(\vec{x})$ s.a. $f(\vec{x},g(\vec{x}))=0$.
2) Funksjonen $g: U_0 \to \mathbb{R}$ er deriverbar, med deriverte

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x},g(\vec{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x},g(\vec{x}))}$$

Spesielt er $g(\vec{a})=b$, og $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{a}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a},b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a},b)}$

Eksempel 1: Når definerer $x^4y^2-yz^3=xz^2$

z som en funksjon av x og y?

Og hva blir $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$?

Løsning: Sett $f(x,y,z) = x^4y^2-yz^3-xz^2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y - z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -3yz^2 - 2xz$$

z kan uttrykkes som $z = g(x,y)$ i nærheten av alle punkter der $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, d.v.s. $-3yz^2 - 2xz \neq 0$

Da får vi

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{4x^3y^2 - z^2}{-3yz^2 - 2xz}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2x^4y - z^3}{-3yz^2 - 2xz}$$

Sjekk: Deriver $x^4y^2 - yz^3 = xz^2$ med tanke på x:

$$4x^3y^2 - 3yz^2\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 + 2xz\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$4x^3y^2 - z^2 = (2xz + 3yz^2)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x^3y^2 - z^2}{2xz + 3yz^2}$$

Eksempel 5.7.6 Hvordan varierer z med tanke på x og y i et punkt på $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$?

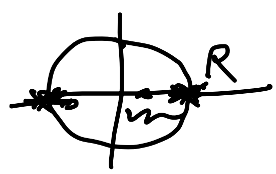
Løsning: $z = z(x,y)$ er implisitt gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Vi setter $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$

Vi ser at $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ når $z \neq 0$.



For $z \neq 0$: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \dfrac{2x}{2z} = - \dfrac{x}{z}$

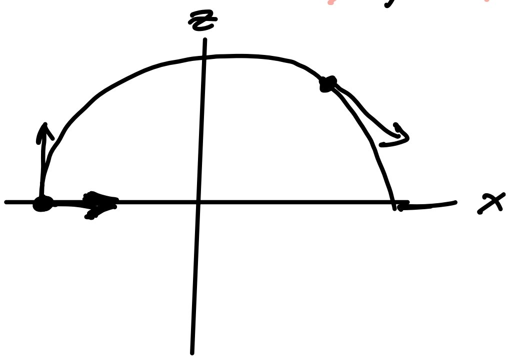
$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{2y}{2z} = - \frac{y}{z}$$

Vi far sjekk med direkte derivasjon av begge sider i:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

m.t.p. x: $\quad \cancel{2}x + \cancel{2}z \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = - \dfrac{x}{z}$

m.t.p. y: $\quad \cancel{2}y + \cancel{2}z \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = - \dfrac{y}{z}$



der $z = 0$: z øker uendelig fort når varierer x, y

$\Downarrow$

ikke deriverbar for $z = 0$.

Bevis: Formelen for de deriverte: Hvis g er deriverbar og $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$, så gir kjerneregelen:

$$0 = f'(\underbrace{\vec{x}, g(\vec{x})}_{\vec{G}(\vec{x})}) \, \vec{G}'(\vec{x})$$

$$= \overbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{G}(\vec{x})) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{G}(\vec{x})) \; \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{G}(\vec{x})) \right]}^{f'} \left[\begin{array}{ccc} & I_m & \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{x}) \end{array} \right]$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_m} \right]$$

For at komponentene $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ så må

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}, g(\vec{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, g(\vec{x}))}$$

$\neq 0$ ved antagelse

Spesielt er $\displaystyle \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{a}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b)}$

For resten av bevis: Definer $\vec{F} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$
ved $\vec{F}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ f(\vec{x}, y) \end{pmatrix}$

Vi har $\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & I & & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right)$

Denne er inverterbar siden determinanten i $(\vec{a}, b)$ er $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$

$\vec{F}'(\vec{a}, b)$ er inverterbar $\Rightarrow$ Vi kan bruke omvendt funksjonsteorem på $\vec{F}$ i $(\vec{a}, b)$:

Siden $\vec{F}(\vec{a}, b) = (\vec{a}, f(\vec{a}, b)) = (\vec{a}, 0)$: Finnes omvendt funksjon $\vec{G}$ definert på en omegn V om $(\vec{a}, 0)$ s.a. $\vec{G}(\vec{a}, 0) = (\vec{a}, b)$

$\vec{G}$ er på formen $\boxed{\vec{G}(\vec{x}, z) = (\vec{x}, h(\vec{x}, z))}$, der h deriverbar.

Definer $g(\vec{x}) = h(\vec{x}, 0)$ for $\vec{x} \in V_0 = \{\vec{x} : (\vec{x}, 0) \in V\}$

g er deriverbar siden h er det, og

$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) \overset{\text{def. } g}{=} f(\vec{x}, h(\vec{x}, 0)) \overset{\text{def } G}{=} \underbrace{f(\vec{G}(\vec{x}, 0))}_{\text{siste komp. i } \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}, 0)) = (\vec{x}, 0)} = 0$$