Seksjon 5.8

Setning 5.8.2 Ekstremalverdisetningen

Anta • $A \subseteq \mathbb{R}^m$ lukket og begrenset.
• $f: A \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

Da har f både maks- og minpunkt(er). Spesielt er f begrenset

Bevis: Sett $M = \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in A\}$ ($M = \infty$ hvis f er ubegrenset).

Vi kan finne en følge $\{\vec{x}_n\}$ s.a. $\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = M$.

Bolzano Weierstrass: $\{\vec{x}_n\}$ har en konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$

Siden A er lukket så vil $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_{n_k} = \vec{c} \in A$

Siden f er kontinuerlig: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\vec{c})$

Siden også $\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = M$, så vil også $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_{n_k}) = M$

Det følger at $M = f(\vec{c})$. Det følger at f har maks. i A.

f er begrenset siden $f(c) < \infty$ ■

Seksjon 5.9 Maksimums/minimumspunkter

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$ deriverbar

Et indre punkt $\vec{a}$ i A kalles stasjonært for f hvis $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

(dvs at $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$, alle i

Setning 5.9.2 sier at hvis f har et lokalt maks/min i et indre punkt $\vec{a} \in A$, så er $\vec{a}$ et stasjonært punkt for f.

Et stasjonært punkt som hverken er maks eller min kalles et sadelpunkt

Eksempel 1 Hva er de stasjonære punktene til

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 12x + 27y \ ?$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x+2)(x-2) = 0 \text{ når } x = \pm 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 27 = -3(y^2-9) = -3(y-3)(y+3) = 0 \text{ når } y = \pm 3$$

4 stasjonære punkter: $(2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3)$

For å avgjøre om stasjonære punkter er maks/min/sadel:

Se på Hessematrisen
$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}$$

Teorem 5.9.8 Annenderiverttesten

Anta $\vec{a}$ stasjonært for f, og at f har kont. part. der av 2. orden i en omegn om $\vec{a}$. Da har vi at

a) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er strengt positive så er $\vec{a}$ lokalt min.

b) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er strengt negative så er $\vec{a}$ lokalt maks.

c) Hvis $Hf(\vec{a})$ har både strengt positive og strengt negative egenverdier så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

Ingen konklusjon hvis noen egenverdier er 0, og de andre har samme fortegn.

Eksempel 1 igjen: Klassifiser de 4 stasjonære punktene som maks/min/sadel.

Løsning: Vi hadde $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 27$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

Vi får $Hf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$

$Hf\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$. Egenverdier $12, -18$. Sadelpunkt

$Hf\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$. Egenverdier $12, 18$. Lokalt min.

$Hf\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$. Egenverdier $-12, -18$. Lokalt maks

$Hf\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$. Egenverdier $-12, 18$. Sadelpunkt.

For funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ skriver vi $Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$Hf(\vec{a})$ er symmetrisk : Sek 4.10 sier at vi har reelle egenverdier λ_1, λ_2.

Kar. polynom til $Hf(\vec{a})$:

$$\det(\lambda I - Hf(\vec{a})) = (\lambda - A)(\lambda - C) - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2$$

$$\| $$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Vi ser at, med $D = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 = \lambda_1\lambda_2$

$$A + C = \lambda_1 + \lambda_2$$

$D = 0$: Ingen konklusjon i 2.der. testen ($\lambda_1\lambda_2 = D = 0 \Rightarrow \lambda_1$ eller $\lambda_2 = 0$)

$D < 0$: λ_1 og λ_2 har motsatt fortegn ($D = \lambda_1\lambda_2 < 0$). sadelpunkt.

$D > 0$: λ_1 og λ_2 har samme fortegn.

Siden $D = AC - B^2 > 0$ så må $AC > 0$, så A og C har samme fortegn.

Siden $A + C = \lambda_1 + \lambda_2$ så har alle fire samme fortegn.

Det følger: $A > 0$: lokalt min

$A < 0$: lokalt maks.

Dette beviser korollar 5.9.9:

(i) Hvis $D < 0$ så er $\vec{a}$ et sadelpunkt
(ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er $\vec{a}$ lokalt min.
(iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er $\vec{a}$ lokalt maks
Hvis $D = 0$ har vi ingen konklusjon

Eksempel 1 igjen: Med $Hf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ får vi $D = -36xy$

$(2,3)$: $D = -216$ sadelpunkt.

$(2,-3)$: $D = 216$. $A = 12 > 0$. lokalt min.

$(-2,3)$: $D = 216$. $A = -12 < 0$ lokalt maks.

$(-2,-3)$: $D = -216$ Sadelpunkt.

Utledning av andrederiverttesten

Taylorrekker av orden 1 med restledd

i 1 variabel: $f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{Taylorpolynom}} + \overbrace{\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2}^{\text{restledd}}$ c mellom a og x

i m variable: $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!}\left(Hf(\vec{c})(\vec{x} - \vec{a})\right) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$ på linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{x}$.

Lemma 5.9.7: Hvis $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$ er egenverdiene til en symmetrisk matrise A, så er $(A\vec{y}) \cdot \vec{y} \geq 0$ for alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Bevis andrederiverttesten for lokalt min.

Hvis alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er > 0, så vil dette gjelde også nær $\vec{a}$, og ($\vec{c}$ for $\vec{x}$ nær $\vec{a}$):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\nabla f(\vec{a})}_{=0}\cdot(\vec{x}-\vec{a}) + \underbrace{\frac{1}{2!}\Big(\underbrace{\overset{A}{Hf(\vec{c})}}_{\text{egenv}>0}\overset{y}{(\vec{x}-\vec{a})}\Big)\cdot\overset{y}{(\vec{x}-\vec{a})}}_{\text{lemma 5.9.7: } \geq 0} \geq f(\vec{a})$$

slik at $\vec{a}$ er lokalt min.

Bevis for lemma 5.9.7: Fra sek 4.10 i boka: En symmetrisk matrise har en ortonormal basis av egenvektorer $\{\vec{v}_i\}$

(betyr: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1$
$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \quad i \neq j$)

$\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives $\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} c_i \vec{v}_i$

$$(A\vec{y})\cdot\vec{y} = \Big(A\big(\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{v}_i\big)\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i\Big)$$

$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i \vec{v}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} (c_i \lambda_i \vec{v}_i)\cdot(c_j \vec{v}_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} c_i^2 \geq 0$$

∎