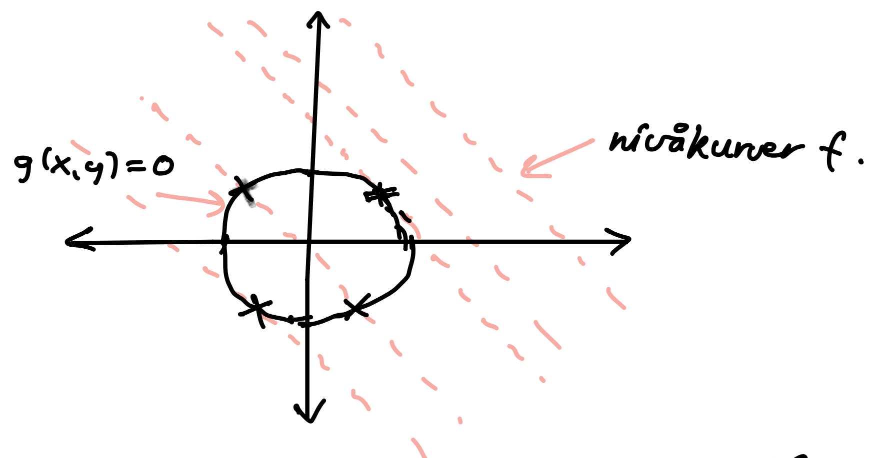
Sek. 5.10 Lagranges multiplikatormetode

Vi vil finne maks/min for $f(x_1,\dots,x_m)$, gitt tilleggsbetingelser:

$$g(x_1,\dots,x_m)=0$$

Eksempel, $m=2$: $f(x,y)=x+y$

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$



ser at vi har maks når $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$

min når $x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$.

Teorem 5.10.2 Lagranges metode med en betingelse

Anta
- $U\subseteq\mathbb{R}^m$ åpen, $f,g:U\to\mathbb{R}$ har kont. part. der.
- $\vec{a}$ lokalt ekstremalpunkt for f på U under betingelsen $g(x_1,\dots,x_m)=0$
- $\nabla g(\vec{a})\neq\vec{0}$

Da fins et tall $\lambda\in\mathbb{R}$ s.a. $\nabla f(\vec{a})=\lambda\nabla g(\vec{a})$

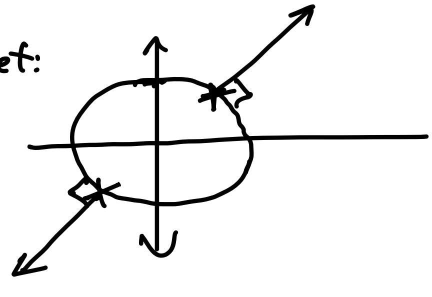
Kort forklaring:

Fra kap. 3: $\nabla g(\vec{a})$ står vinkelrett på nivåflaten til g.

i eksemplet:

$g(x,y)=x^2+y^2-1$

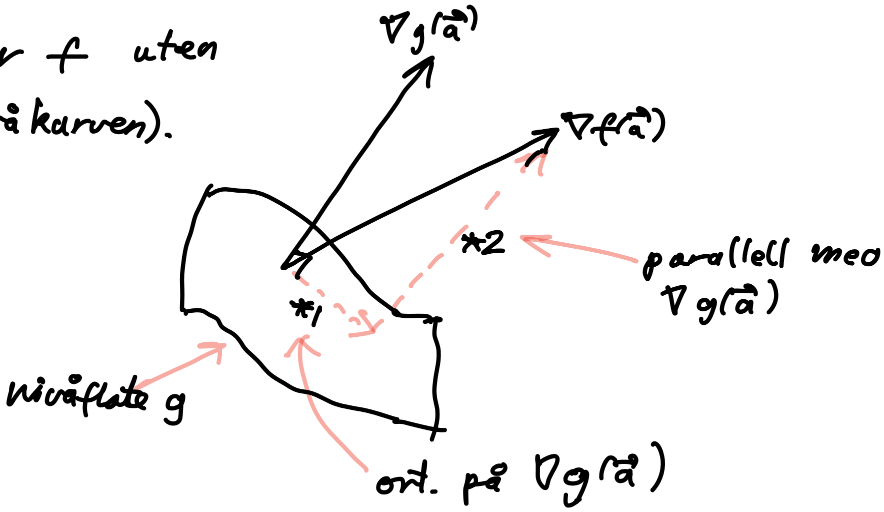
$\nabla g(x,y)=(2x,2y)$



Hvis $\nabla f(\vec{a})$ og $\nabla g(\vec{a})$ ikke var parallelle, så har $\nabla f(\vec{a})$ en komponent ortogonal på $\nabla g(\vec{a})$ (*1).

I denne retningen vokser/avtar f uten å bryte betingelsen (følger nivåkurven).

Dette motsier at vi er i et ekstremalpunkt.



Metode:

1) Finn alle punkter der $\nabla g(\vec{a}) = \vec{0}$ (disse er kandidater)

2) Løs likningen $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$

Alle kandidater fra 1) og 2) må sammenlignes for å finne max/min!

Eksempel 1: Vi vil lage en boks med volum V slik at overflaten blir minst mulig. Hvordan bør vi velge sidene x, y og z

Løsning: $V = xyz \Rightarrow g(x,y,z) = xyz - V = 0$

$$A = f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

f er definert på $U = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$.

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2(y+z), 2(x+z), 2(x+y)\big) \qquad \nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

1) $\nabla g(x,y,z) = 0$: Da må $yz = xz = xy = 0 \Rightarrow$ to av x,y,z må være 0

$$\Downarrow$$
$$g(x,y,z) = 0 - V = -V \neq 0.$$

Får ingen kandidater her.

2) $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$\left.\begin{aligned} 2(y+z) &= \lambda yz \\ 2(x+z) &= \lambda xz \\ 2(x+y) &= \lambda xy \end{aligned}\right\} \text{gang med} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

Like
$$\left(\begin{aligned} 2x(y+z) &= \lambda xyz \\ 2y(x+z) &= \lambda xyz \\ 2z(x+y) &= \lambda xyz \end{aligned}\right.$$

Spesielt: $2x(y+z) = 2y(x+z)$

$$\cancel{2xy} + 2xz = \cancel{2xy} + 2yz$$

$$\cancel{2}x\cancel{z} = \cancel{2}y\cancel{z}$$

$$x = y$$

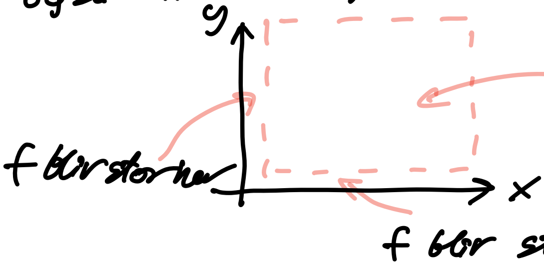
På samme måte: $x = y = z$.

Derfor $xyz = V \Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Eneste kandidat.

Hvorfor er dette minimum?

Det er klart at f ikke har et maksimum: Kan få et så stort areal vi vil ved å lage boksen så flat vi vil.

f er også nedad begrenset (av 0).



minimum må ligge her, ekstremalverdisetningen sier at må ha min. her.

Ble løst på annen måte i eks. 5.9.13, ved å eliminere z ($z = \frac{V}{xy}$):

$$A = f(x,y) = 2xy + 2yz + 2xz = 2xy + \frac{2\cancel{y}V}{x\cancel{y}} + \frac{2\cancel{x}V}{\cancel{x}y}$$

$$= 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

$\nabla f = \left(2y - \frac{2V}{x^2},\ 2x - \frac{2V}{y^2}\right) = \vec{0}$ når $2y = \frac{2V}{x^2}$ og $2x = \frac{2V}{y^2}$

$$yx^2 = xy^2$$

$$x = y$$

$$x^2 y = V \qquad x = y = \sqrt[3]{V}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix} \overset{x=y=V^{1/3}}{=} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$D = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12$

$A = 4 > 0 \Rightarrow$ Lokalt min.

Eksempel 2

$f(x,y) = x + y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

1) $\nabla g = \vec{0} \Leftrightarrow 2x = 2y = 0 \Rightarrow x = y = 0$, som ikke tilfredsstiller $g = 0$.

Ingen kandidater der $\nabla g = \vec{0}$

2) $\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \end{matrix}\right\} \; x = y$

$x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

To kandidater: $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ Lokalt min.

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ Lokalt maks

Teorem 5.10.5 Lagranges metode med flere betingelser

Hvis $\vec{a}$ er maks eller min for $f(x_1, \dots, x_m)$ under betingelsene

$g_1(x_1, \dots, x_m) = 0$

$\vdots$

$g_k(x_1, \dots, x_m) = 0$

så er enten 1) $\nabla g_1(\vec{a}), \dots, \nabla g_k(\vec{a})$ er lineært avhengige.

2) Det finnes konstanter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s.a.

$\nabla f(\vec{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{a})$

Eksempel 5.10.6

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$g_1(x,y,z) = x + 2y - z - 2 = 0$

$g_2(x,y,z) = -x + y + 2z - 1 = 0$

Hva blir maks/min?

Løsning: $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

er lineært uavhengige,
ingen kandidater fra 1)

2) Vi løser $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Samler på en side:

$$\begin{array}{llllll} 2x & & & -\lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \\ & 2y & & -2\lambda_1 & -\lambda_2 & = 0 \\ & & 2z & +\lambda_1 & -2\lambda_2 & = 0 \\ x & +2y & -z & & & = 2 \quad g_1 \\ -x & +y & +2z & & & = 1 \quad g_2 \end{array}$$

Lineært system med utvidet matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rref på denne i matlab gir $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$

Dette må være min. siden f er nedad begrenset, men ikke oppover
av 0

Utledning av Lagranges metode, en betingelse

Anta $\vec{a}$ er lokalt ekstremalpunkt for f under $g(x_1, \dots, x_m) = 0$,
og $\nabla g \neq \vec{0}$

Anta og at $\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \neq 0$, evt. ved å bytte om på variablene.

Implisitt funksjonsteorem sier: Fins omegn U om $(a_1, \dots, a_{m-1})$ i $\mathbb{R}^{m-1}$,
og en $\phi : U \to \mathbb{R}$ slik at 1) $g(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$,
alle $(x_1, \dots, x_{m-1})$,

2) $\phi(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m$

Derfor: $h(x_1,\dots,x_{m-1}) = f\big(\underbrace{x_1,\dots,x_{m-1}, \phi(x_1,\dots,x_{m-1})}_{\vec{G}}\big)$ har $(a_1,\dots,a_{m-1})$

som et ekstremalpunkt uten betingelse.

Men da må $\nabla h = \vec{0}$, s.a. $\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$ alle i.

Kjerneregelen gir:

$$\vec{0} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial x_{m-1}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\begin{pmatrix} I \\ \hline \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \phi}{\partial x_{m-1}} \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}$$

Fra implisitt funksjonsteorem vet vi også at $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}$

sammenlikner

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}}_{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_i}$$