MAT1110 Obligatorisk oppgave 2 av 2

Øyvind Ryan

12. april 2024

Innleveringsfrist

Torsdag 25. april 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Skannede ark må være godt lesbare. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Husk å inkludere eventuell kode og kjøreeksempel, samt relevante plott og figurer i PDF-filen.

Merk at man har kun ett forsøk på oppgaven. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan du bli bedt om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) før innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For å få godkjent denne første obligatoriske oppgaven må du ha gjort seriøse forsøk på å løse alle deloppgavene, og minst halvparten av oppgavene må være tilfredsstillende besvart.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1

På et kjøpesenter deler de tre butikkene Kiwi, Meny, og Rema1000 på et felles sett med handlevogner. Vi antar at

- Av de vognene som er på Kiwi en dag, så vil 50% returneres til Kiwi neste dag, 30% til Meny, og 20% til Rema1000.
- Av de vognene som er på Meny en dag, så vil 30% returneres til Kiwi neste dag, 40% til Meny, og 30% til Rema1000.
- Av de vognene som er på Rema1000 en dag, så vil 20% returneres til Kiwi neste dag, 30% til Meny, og 50% til Rema1000.

La x_n, y_n, z_n være antall vogner etter n dager på Kiwi, Meny, og Rema1000, respektive.

a)

Forklar at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Løsning: Det er tre bidrag til antall vogner på Kiwi etter $n+1$ dager:

- De som var på Kiwi etter n dager $(0.5x_n)$,
- de som var på Meny etter n dager $(0.3y_n)$,
- og de som var på Rema1000 etter n dager $(0.2z_n)$.

Dette gir likningen

$$x_{n+1} = 0.5x_n + 0.3y_n + 0.2z_n.$$

På samme måte får vi likningene

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 0.3x_n + 0.4y_n + 0.3z_n \\ z_{n+1} &= 0.2x_n + 0.3y_n + 0.5z_n \end{aligned}$$

Disse tre likningene kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

I det følgende skal vi skrive $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$.

b)

Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A, og finn en tilhørende egenvektor. Finn også de andre egenverdiene med tilhørende egenvektorer på én av følgende måter:

1. ved regning. Du kan da få bruk for at
$$\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.43\lambda - 0.03 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 0.4\lambda + 0.03).$$

2. ved å bruke kommandoen `eig` i Matlab (eller `linalg.eig` i numpy i Python) til å finne forslag til egenverdier/egenvektor, og teste om disse faktisk er egenvektorer/egenverdier.

Løsning: Vi sjekker først om vi kan finne en egenvektor for $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
I - A &= \begin{pmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dette viser at $(1, 1, 1)$ er en egenvektor for $\lambda = 1$.

Hvis vi bruker Matlab er det naturlig å gjette på egenverdier 0.1, 0.3, og 1, med tilhørende egenvektorer $(1, -2, 1)$, $(-1, 0, 1)$, og $(1, 1, 1)$, respektive (Matlabs vektorer er dog skalerte i forhold til disse). At disse faktisk er egenvektorer er lett å vise:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 - 0.6 + 0.2 \\ 0.3 - 0.8 + 0.3 \\ 0.2 - 0.6 + 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.2 \\ -0.3 + 0.3 \\ -0.2 + 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 0.3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det er en del jobb å komme fram til egenverdiene ved regning:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 0.5 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & \lambda - 0.4 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 0.5) \begin{vmatrix} \lambda - 0.4 & -0.3 \\ -0.3 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} + 0.3 \begin{vmatrix} -0.3 & -0.3 \\ -0.2 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} - 0.2 \begin{vmatrix} -0.3 & \lambda - 0.4 \\ -0.2 & -0.3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 0.5)((\lambda - 0.4)(\lambda - 0.5) - 0.09) + 0.3(-0.3(\lambda - 0.5) - 0.06) - 0.2(0.09 + 0.2(\lambda - 0.4)) \\
&= (\lambda - 0.5)(\lambda^2 - 0.9\lambda + 0.11) + 0.3(-0.3\lambda + 0.09) - 0.2(0.2\lambda + 0.01) \\
&= (\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.56\lambda - 0.055) + (-0.09\lambda + 0.027) + (-0.04\lambda - 0.002) \\
&= \lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.43\lambda - 0.03.
\end{aligned}$$

Polynomdivisjon, samt formelen for løsningen av andregradslikningen gir nå

$$\lambda^3 - 1.4\lambda^2 + 0.43\lambda - 0.03 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 0.4\lambda + 0.03) = (\lambda - 1)(\lambda - 0.1)(\lambda - 0.3)$$

Egenvektorer for $\lambda = 0.1$ kan vi nå finne slik:

$$
\begin{aligned}
0.1I - A &= \begin{pmatrix} -0.4 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & -0.3 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

slik at $(1, -2, 1)$ er en egenvektor.

Egenvektorer for $\lambda = 0.3$ kan vi finne slik:

$$
\begin{aligned}
0.3I - A &= \begin{pmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & -0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

slik at $(-1, 0, 1)$ er en egenvektor.

c)

Anta at vi starter med 40 vogner hos Kiwi, 10 hos Meny, og 100 hos Rema1000. Hvor mange vogner vil antallet hos Meny stabilisere seg på i det lange løp?
Løsning: Vi radreduserer

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 40 \\ -2 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & -2 & 3 & 90 \\ 0 & 2 & 0 & 60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & -2 & 3 & 90 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 150 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Etter n dager vil vi derfor ha

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix} = A^n \left(20 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 50 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= 20 \cdot 0.1^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 30 \cdot 0.3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 50 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

I det lange løp vil dette gå mot $50 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$, slik at det vil være 50 vogner hos Meny i det lange løp.

Oppgave 2

I et eksempel i boka regner vi ut overflatearealet til en torus med indre radius r, ytre radius R. Man kan vise at området avgrenset av en torus kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (R + w\cos u)\cos v\mathbf{i} + (R + w\cos u)\sin v\mathbf{j} + w\sin u\mathbf{k},$$

der $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$, og $0 \le w \le r$.

a)

Vis at absoluttverdien til Jacobideterminanten er

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = w(R + w\cos u).$$

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} -w\sin u\cos v & -(R + w\cos u)\sin v & \cos u\cos v \\ -w\sin u\sin v & (R + w\cos u)\cos v & \cos u\sin v \\ w\cos u & 0 & \sin u \end{vmatrix} \\
&= w\cos u \begin{vmatrix} -(R + w\cos u)\sin v & \cos u\cos v \\ (R + w\cos u)\cos v & \cos u\sin v \end{vmatrix} \\
&\quad + \sin u \begin{vmatrix} -w\sin u\cos v & -(R + w\cos u)\sin v \\ -w\sin u\sin v & (R + w\cos u)\cos v \end{vmatrix} \\
&= w\cos u(R + w\cos u)\cos u\left(-\sin^2 v - \cos^2 v\right) \\
&\quad + \sin u(R + w\cos u)w\sin u\left(-\cos^2 v + \sin^2 v\right) \\
&= -w\cos^2 u(R + w\cos u) - w\sin^2 u(R + w\cos u) \\
&= -w(R + w\cos u)
\end{aligned}$$

Tar vi absoluttverdier får vi $w(R + w\cos u)$.

b)

Finn volumet av torusen. Hvis du ikke kom i mål på **a)** så kan du uansett bruke uttrykket for Jacobideterminanten derfra.
Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^r \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} w(R + w\cos u)\,dv\right] du\right] dw \\
&= 2\pi \int_0^r \left[\int_0^{2\pi} w(R + w\cos u)\,du\right] dw \\
&= 2\pi \int_0^r \left[wRu + w^2\sin u\right]_0^{2\pi} dw \\
&= 2\pi \int_0^r 2\pi wR\,dw \\
&= 4\pi^2 R\left[w^2/2\right]_0^r \\
&= 2\pi^2 Rr^2.
\end{aligned}$$