UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1120 — Lineær algebra.
Eksamensdag:	Mandag 7. desember 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Under sensureringen teller i utgangspunktet alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 3 osv.) 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

I denne oppgaven er A matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Finn en basis for søylerommet til A.

b) Finn en basis for nullrommet til A.

c) Finn en ortogonal basis for søylerommet til A.

d) Vis at projeksjonen av $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ned på søylerommet til A er $\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e) Finn alle minste kvadraters løsninger av det inkonsistente ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

I denne oppgaven er $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til B.

b) Finn $\lim_{n\to\infty} \frac{B^n \mathbf{x}}{7^n}$ når $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

I resten av oppgaven skal vi finne singulærverdidekomposisjonen $A = U\Sigma V^T$ til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Bruk resultatene i a) til å finne Σ og V.

d) Finn U.

Oppgave 3

I denne oppgaven er U og V to underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom H. Vi lar

$$U \cap V = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \text{ er med i både } U \text{ og } V\}$$

og

$$U + V = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ der } \mathbf{u} \in U \text{ og } \mathbf{v} \in V\}$$

Man kan vise at

(I) $U \cap V$ er et underrom av H.

(II) $U + V$ er et underrom av H.

Vis én av påstandene (I) og (II), du kan selv velge hvilken. Vis også at

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

(*Hint:* Start med en basis for $U \cap V$ og utvid den til basiser for U og V.)

SLUTT