Oppgaver i MAT1120, Høst 2006.

Oppgave 1. I denne oppgaven kan du bruke at matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er radekvivalente.

a) Er vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et element i nullrommet til A ?

Finn en basis for nullrommet til A.

Løsning: Utregning viser at $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så svaret på det første spørsmålet er nei. Nullrommet til A er lik nullrommet til B som man lett ser er utspent av $(-2, 1, 0, 0, 0)$.

b) Angi en basis for søylerommet til A. Hva er dimensjonen til radrommet til A ?

Løsning: En basis for Col$A$ består av pivotsølene til A. Disse er, som vi kan lese ut fra B, 1., 3., 4. og 5. søyle i A. Dimensjonen til søylerommet til A er altså lik 4, og det er også dimensjonen til radrommet til A (siden $\dim \mathrm{Col}A = \dim \mathrm{Row}A$).

Oppgave 2.

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Løsning: Enkel utregning gir at den karakteristiske ligningen til A er $(3-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$. Så løsningene til denne, og dermed egenverdiene til A, er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$.

b) Er matrisen A i pkt. **a**) diagonaliserbar ?

Løsning: Matrisen A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har tre lineært uavhengige egenvektorer. Vi regner ut de tilhørende egenrommene:

$$E_1 = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

$$E_3 = \text{Nul}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Vi ser da at A ikke kan ha tre lineært uavhengige egenvektorer siden begge egenrommene har dimensjon lik 1. (Man kan egentlig begrunne at A ikke er diagonaliserbar straks man har funnet ut at $\dim E_1 = 1$: siden egenverdien 1 har algebraisk multiplisitet lik 2 måtte $\dim E_1$ også ha vært lik 2 dersom A var diagonaliserbar).

Oppgave 3.

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad opptil 2 i en reell variabel x.

La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ betegne standardbasisen for $\mathbb{P}_2$ og la $\mathcal{C} = \{x-2, x+2, 2x^2\}$.

a) Begrunn at $\mathcal{C}$ er basis for $\mathbb{P}_2$ og bestem overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Løsning: La $P = [[x-2]_\mathcal{B} \,|\, [x+2]_\mathcal{B} \,|\, [2x^2]_\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Da er det $P = 2 \cdot (-4) = -8 \neq 0$. Så P er invertibel og det følger at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$. Matrisen P er da overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$, slik at overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Vi definerer nå en lineær avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ ved $T(p(x)) = xp'(x) + p(x-1)$, der $p'(x)$ betegner den deriverte av $p(x)$.

b) Begrunn at matriserepresentasjonen av T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$ er gitt ved $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Er T en isomorfi ?

Løsning : Vi har at

$T(1) = x\cdot 0+1 = 1$, $T(x) = x\cdot 1+(x-1) = -1+2x$, $T(x^2) = x\cdot 2x+(x-1)^2 = 1-2x+3x^2$.

Dette gir at

$$[T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [T(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og derfor at $[T]_{\mathcal{B}} = [[T(1)]_B \,|\, [T(x)]_B \,|\, [T(x^2)]_B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Siden det $[T]_{\mathcal{B}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 0$, så er $[T]_{\mathcal{B}}$ invertibel, og det følger da at T er en isomorfi.

c) La $q(x) = 1 - x + 2x^2$. Beregn $[T(q(x))]_{\mathcal{C}}$.

Løsning: Vi har f. eks. at $[T(q(x))]_{\mathcal{C}} = Q[T(q(x))]_{\mathcal{B}} = Q[T]_{\mathcal{B}}[q(x)]_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(Det finnes alternative måter å komme frem til dette !).

Oppgave 4.

Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

a) Finn en ortogonal basis for søylerommet til A.

Løsning: Gram-Schmidt algoritmen anvendt på søylevektorene til A (listet fra venstre mot høyre) gir at $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er en ortogonal basis for Col$A$.

b) Finn en QR faktorisering av matrisen A.

Løsning: Fra svaret i a) ovenfor, samt utregningene fra Gram-Schmidt algoritmen, finner man at

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ og } R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Alternativt : Q kan man skrive ned utifra svaret i a) (etter normalisering av vektorene fra den ortogonale basisen); deretter finner man R ved å beregne $Q^t A$.

Oppgave 5.

Betrakt likningen $x_1^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_2 - x_2^2 = 8$ i de reelle variablene x_1 og x_2. Finn en ortogonal 2×2 matrise U som er slik at variabelskiftet $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ gjør om denne likningen til en likning uten kryssledd, og angi likningen i de nye variablene.

Løsning: Vi kan skrive $x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2$ som den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$. Man finner enkelt at det karakteristiske polynomet til A er $\lambda^2 - 4$, så egenverdiene til A er 2 og -2, og at de tilhørende egenrommene er henholdshvis $E_2 = \text{Span}\{\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\}$ og $E_{(-2)} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}$.

Vi kan derfor sette $U := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. Da er U ortogonal og slik at $A = U \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} U^t$. Variabelskiftet $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ vil derfor gjøre om likningen $Q(\mathbf{x}) = 8$ til likningen

$\mathbf{y}^t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 8$, dvs $2y_1^2 - 2y_2^2 = 8$, mao $y_1^2 - y_2^2 = 4$, som er uten kryssledd.