MAT1120 – Notat 2 – Tillegg til avsnitt 5.4

Dette notatet utfyller bokas avsnitt 5.4 om matriserepresentasjoner (også kalt koordinatmatriser) av lineære avbildninger mellom endeligdimensjonale vektorrom. En slik matrise inneholder all informasjon om avbildningen, og viktige egenskaper kan avklares fra tilsvarende egenskaper for en matriserepresentasjon.

Teorem A.

La $T : V \to W$ være en lineær avbildning mellom to vektorrom,

der $\boxed{\dim V = n < \infty \ \text{ og } \ \dim W = m < \infty}$.

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for V og $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ en basis for W.

(Begge basisene antaes ordnet i den oppgitte rekkefølgen).

La M være matriserepresentasjonen av T m.h.p. basisene $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ (jf. avsnitt 5.4).

M kalles ofte for koordinatmatrisen til T m.h.p. $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ *fordi den er gitt ved*

$$M = \Big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \ \ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \,\Big]\,;$$

M er den entydige bestemte $m \times n$ matrisen som tilfredstiller at

$$\big[T(\mathbf{v})\big]_{\mathcal{C}} = M\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \quad \textit{for alle } \mathbf{v} \in V.$$

Videre, la $T_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være gitt ved

$$T_M(\mathbf{x}) = M\,\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Da gjelder følgende:

- *1) T er 1-1 $\Leftrightarrow$ T_M er 1-1.*
- *2) T er på W $\Leftrightarrow$ T_M er på $\mathbb{R}^m$.*
- *3) T er en isomorfi $\Leftrightarrow$ T_M er en isomorfi*

  $\Leftrightarrow$ $n = m$ og M er invertibel.

Anta videere at $\boxed{n = m, \text{ så } \dim V = \dim W}$. *Da gjelder følgende:*

- *4) T er en isomorfi $\Leftrightarrow$ M er invertibel,*

  og da er koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. $\mathcal{C}$ og $\mathcal{B}$ gitt ved M^{-1}.
- *5) T er en isomorfi $\Leftrightarrow$ T er 1-1 $\Leftrightarrow$ T er på W.*

Kommentar 1. Vi minner om fra første forelesning (jf. kapittel 1 i Lays bok) at følgende holder:

- T_M er 1-1 $\Leftrightarrow \operatorname{Nul} M = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ kolonnene til M er lineært uavhengige.
- T_M er på $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \operatorname{Col} M = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ kolonnene til M utspenner $\mathbb{R}^m$.

I begge tilfellene kan dette avgjøres ved å betrakte pivotstrukturen i den reduserte trappeformen til M. Sammen med Teorem A kan dette brukes til egenskapene til T.

□

Kommentar 2. Det kan vises at kjernen til T har samme dimensjon som kjernen til T_M, mens billerommet til T har samme dimensjon som billedrommet til T_M.

Dette betyr at

$$\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Ker} T_M) = \dim(\operatorname{Nul} M),$$

$$\dim(T(V)) = \dim(T_M(\mathbb{R}^n)) = \dim(\operatorname{Col} M) = \operatorname{rang} M.$$

Fra rangteoremet for M får vi derfor at

$$\dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(T(V)) = \dim(\operatorname{Nul} M) + \operatorname{rang} M = n = \dim V.$$

Formelen

$$\boxed{\mathrm{dim(Ker\,T)\,+\,dim(T(V))\,=\,dimV}}$$

kalles ofte for *dimensjonsteoremet* (for T). □

Om beviset for Teorem A.

1): Anta at T er 1-1. Vi skal vise at T_M er 1-1.

Betrakt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ og anta at $T_M(\mathbf{x}) = T_M(\mathbf{y})$, d.v.s. $M\,\mathbf{x} = M\,\mathbf{y}$.

Velg da $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ slik at $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$. Vi får at

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M\,\mathbf{x} = M\,\mathbf{y} = M\,[\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v}')]_{\mathcal{C}}$$

og det følger at $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$ (siden koordinatavbildningen m.h.p. $\mathcal{C}$ er 1-1). Dette medfører at $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ (siden vi har antatt at T er 1-1), og det gir at $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$.

Dette viser at T_M er 1-1.

Den omvendte implikasjonen i 1) vises på en liknende måte.

2): Denne ekvivalensen vises med en tilvarende argumentasjon som for punkt 1). Dette overlates som oppgave for interesserte.

3): Første ekvivalens i denne delen følger opplagt av 1) og 2).

Anta så at T_M er en isomorfi, m.a.o. at T_M er 1-1 og på $\mathbb{R}^m$.

Da er $\operatorname{Nul} M = \{\mathbf{0}\}$, så rang $M = n$ (ved rangteoremet for M). Videre er $\operatorname{Col} M = \mathbb{R}^m$, så rang $M = m$. Altså er $n = m$, og M er invertibel ved IMT.

Dette viser implikasjonen $\Rightarrow$ i den andre ekvivalensen. Den omvendte implikasjonen følger direkte av IMT.

Vi antar fra nå av at $n = m$.

4): Selve ekvivalensen i denne delen følger opplagt av 3).

Anta at T er isomorfi, så M er invertibel, og la N være koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. basisene $\mathcal{C}$ og $\mathcal{B}$. Vi må vise at $N = M^{-1}$.

La $\mathbf{w} \in W$ og la $\mathbf{v} = T^{-1}(\mathbf{w})$, så $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. Da er

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = N[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} \qquad (*)$$

samtidig som

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

så

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} \qquad (**)$$

Fra likningene $(*)$ og $(**)$ får vi at $N[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}} = M^{-1}[\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$. Siden $\mathbf{w}$ var en vilkårlig vektor i W, følger det at $N = M^{-1}$, som ønsket.

5): Anta at T er 1-1. Da er T_M 1-1 (ved 1)), dvs $\operatorname{Nul} M = \{\mathbf{0}\}$. IMT gir da at $\operatorname{Col} M = \mathbb{R}^n$, dvs at T_M er på $\mathbb{R}^n$. Altså er T_M en isomorfi. Fra 3) kan vi konkludere med at T er en isomorfi

Anta nå at T er på W. Da er T_M på $\mathbb{R}^m$ (ved 2)), så tilsvarende argumentasjon med IMT gir at T_M er en isomorfi, og dermed at T er en isomorfi.

De to andre implikasjonene som gjenstår å begrunne i 5) er opplagt riktige.

$\square$

Eksempel 1 (**Om polynominterpolasjon**).

La $a_0, a_1, \ldots, a_n$ være $n+1$ forskjellige reelle tall, og betrakt lineæravbildningen $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definert ved

$$T(p) = \big(p(a_0),\, p(a_1),\, \ldots\,,\, p(a_n)\big), \quad p \in \mathbb{P}_n.$$

Da kan vi vise at T en isomorfi.

Vi kan nemlig argumentere som følger:

Siden $\dim \mathbb{P}_n = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, sier 5) i Teorem A at det er nok å sjekke at avbildningen T er 1-1.

Anta derfor at $T(p) = T(q)$, der $p, q \in \mathbb{P}_n$. Da er

$$p(a_j) = q(a_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Dette betyr at $(p-q)(a_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, så polynomet $p - q$ har $n+1$ forskjellige røtter. Siden $p - q$ har grad høyst lik n, må da $p - q$ være 0-polynomet, dvs $p = q$. Dette viser at T er 1-1.

At avbildningen T er en isomorfi betyr at dersom vi får oppgitt $n+1$ reelle tall $b_0, b_1, \ldots, b_n$, m.a.o. en vektor $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ i $\mathbb{R}^{n+1}$, så fins det alltid *nøyaktig* ett polynom $p \in \mathbb{P}_n$ som er slik at $T(p) = \mathbf{b}$, d.v.s. som er slik at

$$p(a_0) = b_0,\, p(a_1) = b_1,\, \ldots,\, p(a_n) = b_n$$

altså som er slik at grafen til p går gjennom punktene

$$(a_0,\, b_0),\, (a_1,\, b_1),\, \ldots,\, (a_n,\, b_n).$$

Vi sier da at polynomet p *interpolerer* de gitte punktene. Det å finne et slikt polynom kalles gjerne *polynominterpolasjon* og er et viktig problem i mange anvendelser.

Vi kan nå bruke siste del av 4) i Teorem A til å bestemme polynomet $p \in \mathbb{P}_n$ som er slik at $T(p) = \mathbf{b}$. Først lar vi M være koordinatmatrisen til T m.h.p. basisen $\mathcal{B} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ for $\mathbb{P}_n$ og standardbasisen $\mathcal{C}$ for $\mathbb{R}^{n+1}$.

Det er rett frem å regne ut at

$$M = \Big[T(1)\ T(t)\ \ldots\ T(t^n)\Big] = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Matriser på denne formen (og transponerte av slike) kalles ofte *Vandermonde matriser*.

Siden T er en isomorfi vet vi fra Teorem A at M er invertibel. Dette kunne vi også ha funnet ut ved å sjekke at $\det M \neq 0$. Men det krever en del arbeid[1] som vi slipper nå.

For å bestemme p kan vi gå i gang med regne ut M^{-1} og så bruke at

$$[p]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}(\mathbf{b})]_{\mathcal{B}} = M^{-1}\mathbf{b}.$$

Merk at vi kan også finne $[p]_{\mathcal{B}}$ ved å bestemme løsningen av systemet $M\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; denne løsningsmetoden er absolutt å foretrekke dersom det er bare et bestemt interpolerende polynom vi skal beregne og n er stor.

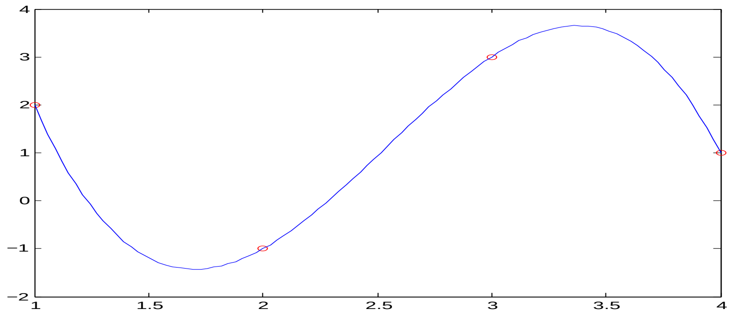

Figure 1: Grafen til 3. grads polynomet som interpoler punktene $(1, 2), (2, -1), (3, 3), (4, 1)$. Polynomet er regnet ut ved hjelp av Matlab og oppsettet beskrevet i dette eksemplet. Se Matlab-heftet for MAT1120.

[1] Man finner at $\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$ (prøv selv!); slike determinanter kalles ofte *Vandermonde determinanter*.

La oss si vi ønsker å finne 3. grads polynomet p som interpolerer punktene $(1,2),(2,-1),(3,3),(4,1)$. Vi har da at

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan da enkelt løse systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved hjelp av Matlab og finner derved koeffisientene til p (se Matlab-heftet). Grafen til p er tegnet i Figur 1.

Dersom vi skal bestemme polynomet p i $\mathbb{P}_2$ som er slik at

$$p(0) = b_0,\ p(1) = b_1,\ p(2) = b_2,$$

der b_0, b_1 og b_2 er oppgitte tall, har vi

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}\,,\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

og en utregning gir

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$[p]_{\mathcal{B}} = M^{-1}\,\mathbf{b} = (b_0,\ -\frac{3}{2}b_0 + 2b_1 - \frac{1}{2}b_2\,,\ \frac{1}{2}b_0 - b_1 + \frac{1}{2}b_2).$$

Det gir $p(t) = b_0 + (-\frac{3}{2}b_0 + 2b_1 - \frac{1}{2}b_2)\,t + (\frac{1}{2}b_0 - b_1 + \frac{1}{2}b_2)\,t^2$.

$\square$

La oss nå se på spesialtilfellet der $\boxed{W = V \text{ og } \mathcal{C} = \mathcal{B}}$:

Vi betrakter da en lineær avbildning $T : V \to V$ og antar at $\mathcal{B}$ er en (ordnet) basis for V.

Koordinatmatrisen til T m.h.p. $\mathcal{B}$ betegner vi som i Lays bok med $[T]_{\mathcal{B}}$.

Del 4) i Teorem A gir oss følgende:

Korollar til Teorem A. *$T : V \to V$ er en isomorfi $\Leftrightarrow$ $[T]_{\mathcal{B}}$ er invertibel,*

og da er koordinatmatrisen til T^{-1} m.h.p. $\mathcal{B}$ gitt ved $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^{-1}$.

Eksempel 2 (**Om derivasjon og antiderivasjon**).

La $V = \text{Span}\,\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ og betrakt lineæravbildningen $D : V \to V$ gitt ved

$$D(f) = f' \quad (= \text{den deriverte av } f).$$

Det er lett å sjekke at $\mathcal{B} = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ er lineært uavhengig. Siden $\mathcal{B}$ også utspenner V (per definisjon av V) er $\mathcal{B}$ en basis for V. Videre er

$$D(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x\,,$$

$$D(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x\,.$$

Det gir

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har determinant lik 2, så den er invertibel. Vi kan derfor konkludere med at D er en isomorfi. Hvis $g \in V$, finner vi $f = D^{-1}(g)$ ved

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([D]_{\mathcal{B}})^{-1}[g]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}[g]_{\mathcal{B}}.$$

Funksjonen f tilfredstiller at $f' = g$, dvs at f er en *antiderivert* av g.

Når f.eks. $g(x) = e^x \sin x$ er $[g]_{\mathcal{B}} = (1, 0)$ og vi finner vi at

$$[f]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er $f(x) = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)$. Det betyr at

$$\int e^x \sin x\, dx \;=\; \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$$

noe vi kunne også ha kommet frem til ved delvis integrasjon. □

Et annet nyttig resultat om koordinatmatriser (som såvidt er omtalt på slutten av avsnitt 5.4) forteller oss hva som skjer med koordinatmatrisen når vi skifter basis:

Teorem B. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $T : V \to V$ være en lineær avbildning. Anta at $\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ begge er basiser for V. La $P = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ betegne koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{B}'$. Da har vi at*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1} \qquad (*)$$

(Dette viser spesielt at $[T]_{\mathcal{B}}$ og $[T]_{\mathcal{B}'}$ er similære matriser).

Bevis. Formelen er enkel å utlede, bare man husker hvordan de involverte matrisene "virker":

For alle $\mathbf{v} \in V$ har vi at

$$[T]_{\mathcal{B}'}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = P\,[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}.$$

Dermed må $[T]_{\mathcal{B}'} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1}$.

$\square$

Eksempel 3.

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineær avbildningen med standardmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La $\mathcal{B}$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^2$, så $[T]_{\mathcal{B}} = A$.

La så $\mathcal{B}'$ være basisen for $\mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Vi skal beregne koordinatmatrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$.

Vi lar da Q være koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}'$ til $\mathcal{B}$, mao $Q = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$.

Poenget med å innføre Q er at det er trivielt å skrive ned Q (fordi $\mathcal{B}$ er standardbasisen):

$$Q = [\mathcal{B}'_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nå vet vi at $P = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ er lik Q^{-1}. Det gir oss at

$$P = Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ved $(*)$ får vi at

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1} = Q^{-1}\,A\,Q$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Eksempel 4 (**Om speilinger i planet**).

La $a \in \mathbb{R}$ og la $L : y = ax$ være linjen i $\mathbb{R}^2$ som går gjennom origo og har stigningstall a.

La $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineær avbildningen som speiler vektorer loddrett gjennom L (S kalles *speilingen om* L). *Vi ønsker å finne standardmatrisen* A *til* S.

Det går an å finne A direkte ved hjelp av noen geometriske betraktninger, men vi kan gjøre dette nokså smertefritt ved å bruke Teorem B. Vi velger først en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^2$ som er "naturlig" med tanke på virkningen av S:

Vi velger først en retningsvektor for L, f.eks. $\mathbf{v}_1 = (1, a)$. Deretter velger vi en normal vektor for L, f.eks. $\mathbf{v}_2 = (-a, 1)$, og setter $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, som opplagt er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Det er da opplagt at $S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ og $S(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$ (lag en skisse!). Vi får derfor at

$$\big[S\big]_{\mathcal{B}} = \Big[\, [S(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} \,|\, [S(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}} \,\Big] = \Big[\, [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} \,|\, [-\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} \,\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La nå $\mathcal{B}'$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og sett $P = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$.

Da er $P = \big[\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,\big] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

Ved $(*)$ i Teorem B får vi at

$$A = [S]_{\mathcal{B}'} = P\,[S]_{\mathcal{B}}\,P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Ved å gange ut finner vi at

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

Skriver vi a på formen $a = \tan\theta$ der $|\theta| < \pi/2$, finner vi, etter en liten omregning med trigonometriske formler, at

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

$\square$

Legg merke til at basisen $\mathcal{B}$ i Eksempel 4 er en basis for $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer for S, og at $[S]_{\mathcal{B}}$ er diagonal (jf. Teorem 8 i avsn. 5.4).

Mer generelt, kan vi betrakte en lineær avbildning $T : V \to V$ der V er endelig-dimensjonalt.

Anta da at V har en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ som består av egenvektorer for T. Hvis $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ er de tilhørende egenverdiene for T, m.a.o.

$$T(\mathbf{v}_1) = d_1\mathbf{v}_1 \,, \; \dots \,, \; T(\mathbf{v}_n) = d_n\mathbf{v}_n,$$

så er $[T]_{\mathcal{B}}$ lik diagonalmatrisen $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ med tallene $d_1, \dots, d_n$ langs hoveddiagonalen. Vi sier derfor at avbildningen T er *diagonaliserbar* når denne antagelsen er oppfylt.

Hvis $\mathcal{B}'$ er en hvilken som helst annen basis for V, så er da matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$ diagonaliserbar, fordi $(*)$ i Teorem B sier at $[T]_{\mathcal{B}'}$ er similær med $[T]_{\mathcal{B}}$, som er diagonal.

Omvendt, hvis vi antar at det finnes en basis $\mathcal{B}'$ for V slik at matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}$ er diagonaliserbar, så kan det vises at det fins en basis for V som består av egenvektorer for T, m.a.o. at T er diagonaliserbar. Dette er ikke spesielt vanskelig, men overlates som en oppgave for interesserte.

Tilsammen gjelder det altså at T er diagonaliserbar hvis og bare hvis det fins en basis for V som er slik at matriserepresentasjonen til T m.h.p. denne basisen er en diagonal matrise.

Oppgaver til Notat 2

Oppgave 1. Betrakt en lineær avbildning $T : V \to W$ mellom to endeligdimensjonale vektorrom.

(i) Begrunn at hvis T er 1-1, så er $\dim V \leq \dim W$.

(ii) Begrunn at hvis T er på W, så er $\dim V \geq \dim W$.

Oppgave 2. La $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ være lineær avbildningen gitt ved

$$T(p(t)) = p(t) + 2\,t^2\,p(t)$$

(jf. oppgave 5.4.6 i Lays bok). Er T 1-1 og/eller på $\mathbb{P}_4$?

Oppgave 3. La $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}3$ være lineær avbildningen gitt ved

$$T(p) = \big(p(1), p'(1), p''(1)\big)\,.$$

Er T 1-1 og/eller på $\mathbb{R}^3$?

Oppgave 4. La $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ være lineær avbildningen gitt ved

$$T(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)\,t + (4a_1 + a_2)\,t^2\,.$$

(jf. oppgave 5.4.7 i Lays bok).

Begrunn at T er en isomorfi og bestem en formel for $T^{-1}(q)$ når $q(t) = b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2$.

Oppgave 5 [M]. La $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ være lineær avbildningen gitt ved

$$T(p) = \big(p(-2), p(3), p(1), p(0)\big)\,,$$

(jf. oppgave 5.4.10 i Lays bok). Merk at Eksempel 1 i dette notatet viser at T er en isomorfi.

(i) Finn polynomet $p \in \mathbb{P}_3$ som er slik at $T(p) = (0, 1, 0, 1)$.

(ii) Lag en skisse av grafen til p over intervallet $[-3, 3]$ og sjekk at p interpolerer punktene $(-2, 0), (3, 1), (1, 0), (0, 1)$.

(iii) Finn en formel for $T^{-1}(\mathbf{b})$ når $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$.

Oppgave 6. La $V = \text{Span}\,\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ og betrakt lineæravbildningen $D^2 : V \to V$ gitt ved

$$D^2(f) = f'' \quad (= \text{den dobbelt deriverte av } f).$$

(i) Finn koordinatmatrisen til D^2 m.h.p. basisen $\mathcal{B} = \{e^x \sin x, e^x \cos x\}$ for V.

(ii) Begrunn at D^2 er en isomorfi og angi koordinatmatrisen til $(D^2)^{-1}$ m.h.p. basisen $\mathcal{B}$.

(iii) Finn en løsning av diff.likningen $f''(x) = e^x \cos x$.

Oppgave 7. La L være linjen i $\mathbb{R}^2$ gitt ved likningen $y = 2x$ og la $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineær avbildningen gitt ved at $P(\mathbf{x})$ er vektoren i L som fåes ved å avbilde $\mathbf{x}$ loddrett på L. (Avbildningen P kalles *den ortogonale projeksjonen av* $\mathbb{R}^2$ *på* L).

Finn standardmatrisen til P.

Oppgave 8. La W være planet i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom origo og har $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ som normalvektor.

(i) Bestem to vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in W$ slik at $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}\}$ blir en basis for $\mathbb{R}^3$.

La $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær avbildningen som er slik at $S(\mathbf{x})$ er vektoren som fåes ved å speile $\mathbf{x}$ loddrett gjennom planet W.

(ii) Bestem $[S]_{\mathcal{B}}$.

(iii) Bruk Teorem B til å finne et uttrykk for standardmatrisen til S.

(iv) La $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær avbildningen gitt ved at $Q(\mathbf{x})$ er vektoren i W som fåes ved å avbilde $\mathbf{x}$ loddrett på W. (Avbildningen Q kalles *den ortogonale projeksjonen av* $\mathbb{R}^3$ *på* W). Finn standardmatrisen til Q.

(v) Hva er sammenhengen mellom S og Q ?