MAT1120
Oppgaver til plenumsregningen torsdag 29/11

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

November 2007

Fra eksamen i MAT1120, høst 2003 : oppgave 2

Ser på indreproduktet i $\mathcal{P}_2$ gitt ved

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1).$$

a) Vi starter med standardbasisen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$, og anvender Gram Schmidt på denne:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = 1.$
- $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$ og $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle t, 1 \rangle = 0 + 1/2 + 1 = 3/2.$ Vi får derfor

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = t - \frac{1}{2}1 = t - \frac{1}{2}$$

- $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
- $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle t^2, 1 \rangle = 0 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$,
- $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle t^2, t - \frac{1}{2} \rangle = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Vi får derfor

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 \\ &= t^2 - \frac{5}{12} 1 - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Vi kan derfor velge $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{12}\}$.

b) Vi har at $[t]_{\mathcal{C}} = [t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]_{\mathcal{C}} = (\frac{1}{2}, 1, 0)$.
Vi ser og at

$$
\begin{aligned}
[t^2]_{\mathcal{C}} &= [t^2 - t + \tfrac{1}{12} + t - \tfrac{1}{12}]_{\mathcal{C}} \\
&= [c_3 + t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}]_{\mathcal{C}} \\
&= [c_3 + c_2 + \tfrac{5}{12}]_{\mathcal{C}} = [c_3 + c_2 + \tfrac{5}{12} c_1]_{\mathcal{C}} \\
&= (\frac{5}{12}, 1, 1).
\end{aligned}
$$

Overgangsmatrisen blir dermed (se seksjon 4.7)

$$
P = \begin{bmatrix} [1]_{\mathcal{C}} & [t]_{\mathcal{C}} & [t^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Dette kunne vi også regnet ut ved først å sette opp overgangsmatrisen fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$ (som vi får fra ligningene $[c_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0), [c_2]_{\mathcal{B}} = (-\frac{1}{2}, 1, 0), [c_3]_{\mathcal{B}} = (\frac{1}{12}, -1, 1)$), og invertert denne.

c) Vi definerer $L(p(t)) = tp'(t)$. Vi regner ut

$$\begin{aligned} L(1) &= 0 \\ L(t) &= t \times 1 = t \\ L(t^2) &= 2t^2 \end{aligned}$$

Matrisen til L m.h.p. $\mathcal{B}$ er da (se teorem 8 i seksjon 5.4)

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da har vi at

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}} &= PL_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$