MAT1120 – Løsningsforslag – Eksamen H08

Merk : Det er vedlagt en Matlab-kjøring som du kan henvise til når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1. *La* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

For $j = 1, \ldots, 5$ *lar vi* $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^4$ *betegne kolonnevektor nr.* j *i* A. *Vi betrakter* $\mathbb{R}^4$ *som et indreprodukt rom med hensyn på prikkproduktet.*

a) Bestem rang A *og angi en lineær avhengighetsrelasjon mellom kolonnevektorene til* A.

Løsning. Fra Matlab-utskriften ser vi at `rref` A har pivoter i de fire første kolonnene, men ikke i den siste. Dermed er rang $A = 4$ og kolonnevektorene til A lineært avhengige. Fra `rref` A ser vi også at en lineær avhengighetsrelasjon mellom kolonnene i A er

$$\mathbf{a}_5 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3,$$

dvs $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$.

La nå U være underrommet av $\mathbb{R}^4$ gitt ved $U = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b) Begrunn at $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ *er en ortogonal basis for* U. *Beregn deretter de ortogonale projeksjonene av* $\mathbf{a}_4$ *og av* $\mathbf{a}_5$ *på* U.

Løsning. Utregning gir $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$. Så $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ er ortogonal, og spesielt lineært uavhengig (siden alle elementene i $\mathcal{A}$ er $\neq \mathbf{0}$). Siden $\mathcal{A}$ også utspenner U (p. def. av U), så er $\mathcal{A}$ en ortogonal basis for U.

Siden $\mathbf{a}_5 \in U$ (fra a)), så er $\text{Proj}_U(\mathbf{a}_5) = \mathbf{a}_5$. Videre er

$$\begin{aligned} \text{Proj}_U(\mathbf{a}_4) &= \frac{\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3 \\ &= \frac{4}{4}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

c) Finn en basis for $U^\perp$ *og angi* $\dim U^\perp$.

Løsning. La $\mathbf{b} = \mathbf{a}_4 - \text{Proj}_U(\mathbf{a}_4) = (1, 1, 2, 0) - (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$. Da vet vi at $\mathbf{b} \in U^\perp$, og derfor at $2\mathbf{b} = (1, -1, 1, -1) \in U^\perp$.

Videre vet vi (fra en oppgave) at $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, og at $\dim U = 3$ (fra b)). Så $\dim U^\perp = 4 - 3 = 1$.

Alternativt kan vi sette $M = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$, som har rang lik 3 (ved b)). Da er $U^\perp = (\text{Col}\, M)^\perp = \text{Nul}\, M^T$, og rangteoremet gir

$$\begin{aligned}\dim U^{\perp} &= \dim \operatorname{Nul} M^T = \text{ant. kol. i } M^T \text{ - rang } M^T \\ &= 4 \text{ - rang } M = 4-3 = 1.\end{aligned}$$

Når dette er klart følger det at $\{(1,-1,1,-1)\}$ er en basis for $U^{\perp}$.

Oppgave 2. *La V være vektorommet som består av alle reelle funksjoner definert på $[0,2\pi]$. Definer $f_0, f_1, f_2 \in V$ ved*

$$f_0(t) = 1\,,\ \ f_1(t) = \sin t\,,\ \ f_2(t) = \cos t$$

for alle $t \in [0,2\pi]$.

Sett $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2\}$ og $W = \operatorname{Span}\mathcal{B}$. Vi tar det for gitt at $\mathcal{B}$ er en basis for W, og betrakter den som ordnet i den oppgitte rekkefølgen.
La $T : W \to \mathbb{R}^4$ være lineæravbildningen definert ved

$$T(f) = (\, f(0),\, f(\tfrac{\pi}{2}),\, f(\pi), f(\tfrac{3\pi}{2})\,), \quad f \in W.$$

I punktene c) og d) betrakter vi $\mathbb{R}^4$ som et indreprodukt rom med hensyn på prikkproduktet og betegner den assosierte normen i $\mathbb{R}^4$ med $\|\cdot\|$.

a) Bestem 4×3 matrisen M som er slik at $T(f) = M\,[f]_{\mathcal{B}}$ for alle $f \in W$, og begrunn at avbildningen T er $1-1$.

Løsning. La $f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 \in W$. Da er $[f]_{\mathcal{B}} = (c_0, c_1, c_2)$ og

$$T(f) = \begin{bmatrix} c_0 + c_2 \\ c_0 + c_1 \\ c_0 - c_2 \\ c_0 - c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Så med $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ er $T(f) = M\,[f]_{\mathcal{B}}$ for alle $f \in W$ som ønsket.

Alternativt kan vi la $\mathcal{C}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^4$. Siden $T(f) = [T(f))]_{\mathcal{C}}$ for alle $f \in W$, ser vi at M må være koordinatmatrisen til T med hensyn på $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$. Dermed er

$$M = [\,T(f_0)\ T(f_1)\ T(f_2)\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Videre ser vi at matrisen M er lik $[\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$, med notasjonen fra oppgave 1. Så vi vet at M har lineært uavhengige (ortogonale) kolonnevektorer, og derfor at avbildningen $\mathbf{x} \to M\,\mathbf{x}$ fra $\mathbb{R}^3$ inn i $\mathbb{R}^4$ er $1-1$. Det følger da at T er $1-1$ (jf. Notat 2).

b) La $\mathrm{Ran}\, T$ være billedrommet til T, dvs $\mathrm{Ran}\, T = \{T(f) \mid f \in W\}$. Angi $\dim(\mathrm{Ran}\, T)$ og begrunn at $(1, 1, 2, 0)$ ikke er med i $\mathrm{Ran}\, T$.

Løsning. Fra a), og det at avbildningen $f \to [f]_{\mathcal{B}}$ er en isomorfi fra W inni $\mathbb{R}^3$, får vi at $\mathrm{Ran}\, T = \{M\,\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Col}\, M = U$, der U er som i oppgave 1. Dermed er $\dim(\mathrm{Ran}\, T) = \dim U = 3$.

Videre ser vi fra Matlab-utskriften at de fire første kolonnene i A er lineært uavhengige. Spesielt er $\mathbf{a}_4 = (1, 1, 2, 0)$ *ikke* en lineær kombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Dermed er $(1, 1, 2, 0) \notin \mathrm{Col}\, M = \mathrm{Ran}\, T$.

c) Bestem funksjonen $\widehat{f} \in W$ som er slik at grafen til $\widehat{f}$ passer best mulig med punktene $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 2)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, i den forstand at for $f \in W$, så er $\|(T(f) - (1, 1, 2, 0)\|$ minst mulig når $f = \widehat{f}$.

Løsning. "Designmatrisen" for dette problemet er $[\,T(f_0)\ T(f_1)\ T(f_2)\,] = M$, og funksjonen $\widehat{f} = \widehat{c_0} f_0 + \widehat{c_1} f_1 + \widehat{c_2} f_2$ i W er bestemt ved at $(\widehat{c_0}, \widehat{c_1}, \widehat{c_2})$ er minste kvadraters løsning av det (inkonsistente) systemet $M\,\mathbf{x} = (1, 1, 2, 0)$.

Nå er $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}\, M}(1, 1, 2, 0) = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$ (jf. 1b)).
Så $(\widehat{c_0}, \widehat{c_1}, \widehat{c_2})$ er bestemt ved at $M\,(\widehat{c_0}, \widehat{c_1}, \widehat{c_2}) = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$, dvs ved at

$$\widehat{c_0}\,\mathbf{a}_1 + \widehat{c_1}\,\mathbf{a}_2 + \widehat{c_2}\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$$

som gir at $\widehat{c_0} = 1, \widehat{c_1} = 1/2, \widehat{c_2} = -1/2$. Så $\widehat{f} = f_0 + \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2$, dvs

$$\widehat{f}(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \ \left(= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t - \pi/4)\right).$$

Det går også an å bestemme $\widehat{c_j}$-ene ved hjelp av normalikningene

$$M^T M\,(\widehat{c_0}, \widehat{c_1}, \widehat{c_2}) = M^T(1, 1, 2, 0)\,,$$

som er enkle å løse her fordi $M^T M = \mathrm{diag}(4, 2, 2)$.

d) Angi singulærverdiene til M. La så $S = \{f \in W \mid \|\,[f]_{\mathcal{B}}\,\| = 1\}$. Begrunn at $\|T(f)\| \leq 2$ for alle $f \in S$.

Løsning. Siden $M^T M = \mathrm{diag}(4, 2, 2)$ får vi at singulærverdiene til M er $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = \sqrt{2}, \sigma_3 = \sqrt{2}$.

La $f \in S$ og sett $\mathbf{x} = [f]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^4$.
Da er $\|\mathbf{x}\| = 1$ og vi vet da fra teorien at $\|M\,\mathbf{x}\| \leq \sigma_1 = 2$. Vi får derfor at

$$\|T(f)\| = \|M\,\mathbf{x}\| \leq 2$$

som ønsket.

Dette kan også utledes direkte ved hjelp av Pythagoras slik :

$$\begin{aligned}\|T(f)\|^2 &= \|M\,\mathbf{x}\|^2 = \|x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3\|^2 \\ &= \|x_1\mathbf{a}_1\|^2 + \|x_2\mathbf{a}_2\|^2 + \|x_3\mathbf{a}_3\|^2 \\ &= 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \le 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 4\|\mathbf{x}\|^2 = 4.\end{aligned}$$

Oppgave 3.

La $A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ *og la* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *være lineæravbildningen som har* A *som sin standardmatrise.*

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\, \mathbf{b}_2\}$ *være basisen for* $\mathbb{R}^2$ *gitt ved*

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi betrakter $\mathcal{B}$ *som ordnet i den oppgitte rekkefølgen.*

a) Beregn koordinatmatrisen $B = [T]_{\mathcal{B}}$ *til* T *med hensyn på* $\mathcal{B}$*, og skriv* B *på formen* $r\,R_\varphi$ *der* r *er et positivt tall og* R_φ *er standardmatrisen til en rotasjon i* $\mathbb{R}^2$ *om origo med en vinkel* φ *(mot klokka).*

Løsning. La $\mathcal{C}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og sett $P = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.
Da er $P = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ved overgangsformelen for basisskifte får vi at

$$\begin{aligned} B = [T]_B &= P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{C}}\,P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P^{-1} A\, P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\frac{-\pi}{4}) & -\sin(\frac{-\pi}{4}) \\ \sin(\frac{-\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, R_{(-\pi/4)}\ (= \sqrt{2}\, R_{7\pi/4}).$$

b) Begrunn at A *ikke er diagonaliserbar når den betraktes som en reell matrise. Angi de komplekse egenverdiene til* A *og en tilhørende kompleks egenvektor for hver av disse.*

Løsning. Fra a) ser vi at A er similær med matrisen $B = \sqrt{2}R_{(-\pi/4)}$, (siden $A = P\,B\,P^{-1}$). Det er geometrisk opplagt at $\sqrt{2}R_{(-\pi/4)}$ ikke har noen reelle egenvektorer så den er ikke diagonaliserbar (som en reell matrise). Dermed kan heller ikke A være diagonaliserbar (som en reell matrise).
De komplekse egenverdiene til $B = \sqrt{2}R_{(-\pi/4)}$ er $\sqrt{2}\,e^{\pm i\,\pi/4} = 1 \pm i$ og tilhørende egenvektorer er f.eks. $(1, i)$ for $\lambda_1 = 1 + i$ og $(1, -i)$ for $\lambda_2 = 1 - i$.

Egenverdiene til A er derfor også $1 \pm i$. Tilhørende egenvektorer blir da f.eks. $P\,(1, i) = (1 + 3i, i)$ for $\lambda_1 = 1 + i$ og $P\,(1, -i) = (1 - 3i, -i)$ for $\lambda_2 = 1 - i$.

Dette punktet kan også besvares uten å bruke a) : det kar. polynomet til A regnes ut til å være

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1.$$

Det har opplagt ingen reelle røtter, så A har ingen reelle egenverdier. Spesielt kan ikke A være diagonaliserbar (som en reell matrise).

De komplekse røttene til p_A ser vi er $1 \pm i$. Det komplekse egenrommet $\mathrm{Nul}(A - (1+i)I)$ til $\lambda_1 = 1 + i$ regnes så til å være utspent av $\mathbf{v} = (1 + 3i, i)$. Egenrommet til $\overline{\lambda_1} = 1 - i$ er da utspent av $\overline{\mathbf{v}} = (1 - 3i, -1)$.

c) Matrisen A er opplagt invertibel og vi setter $C = A^{-1}$. La $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ og betrakt det dynamiske systemet gitt ved $\mathbf{x}_{k+1} = C\,\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Begrunn at $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ når $k \to \infty$.

Løsning. Vi vet at $\mathbf{x}_k = C^k \mathbf{x}_0$. Nå vil

$$\begin{aligned} C^k &= (A^{-1})^k = (P^{-1}\,B^{-1}\,P)^k = P^{-1}\,(\tfrac{1}{\sqrt{2}}R_{\pi/4})^k\,P^{-1} \\ &= P^{-1}\,(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^k R_{k\pi/4}\,P \to O \text{ når } k \to \infty \quad (\text{siden } (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^k \to 0), \end{aligned}$$

og det følger da at $\mathbf{x}_k \to O\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ når $k \to \infty$.

Alternativt kan vi ta utgangspunkt i at de komplekse egenverdiene til $C = A^{-1}$ er $(1 \pm i)^{-1}$. Begge disse har modulus lik $\frac{1}{\sqrt{2}}$, som er mindre enn 1, og det følger da lett fra dette at $C^k \to O$ når $k \to \infty$. Man kan også skrive $\mathbf{x}_0$ som en lineær kombinasjon av komplekse egenvektorer for C og argumentere videre fra det.