UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 6 desember, 2018
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver som teller likt ved sensuren. Det forventes at du gir forklaringer for alle dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1a

Angi siste radvektor i A som en lineær kombinasjon av de to første radvektorene. Finn deretter rangen til matrisen A. Finn også dimensjonen til nullrommet til A.

Løsning: Ser at siste rad er lik andre rad minus første rad. Evt. kan vi stille opp et 3×2 lineært likningssystem for å vise dette. Så radrommet til A er høyst 2-dimensjonalt. Faktisk er det 2-dimensjonalt idet de to første radene er lineært uavhengige. Dermed er rangen til A er lik 2, og da er dimensjonen til nullrommet $3 - 2 = 1$.

$\square$

La $\mathbf{p} = (1, -2, -3)$ og $\mathbf{z} = (1, -1, 1)$. Videre la $W = \operatorname{Col} A$ være kolonnerommet til A.

1b

Vis at $\mathbf{p} \in W$ og at $\mathbf{z} \in W^{\perp}$, der $W^{\perp}$ betegner det ortogonale komplementet til W når $\mathbb{R}^3$ er utstyrt med det vanlige prikkproduktet.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Vi vet at $W = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$*. Vi løser derfor systemet* $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ *og finner ved hjelp av den vedlagte Matlab-utskriften at en løsning er f.eks.* $\mathbf{x} = (2, -1, 0)$*. Så* $\mathbf{p}$ *ligger i* W*.*
For å vise at $\mathbf{z} \in W^{\perp}$ *er det nok å sjekke at* $\mathbf{p}$ *er ortogonal på hver kolonne* $\mathbf{a}_j$ *i* A*. Utregning gir* $\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}_j = 0$ *for* $j = 1, 2, 3$*, så* $\mathbf{z} \in W^{\perp}$*.*

□

La $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$, så $\mathbf{b} = (2, -3, -2)$.

1c

Finn alle minste kvadraters løsninger til systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Løsning: Siden $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{z}$ *der* $\mathbf{p} \in W$ *og* $\mathbf{z} \in W^{\perp}$*, er* $\mathbf{p}$ *den ortogonale projeksjonen av* $\mathbf{b}$ *ned i* W*. Dermed vil enhver minste kvadraters løsning* $\hat{\mathbf{x}}$ *av (det inkonsistente) systemet* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *være en løsning av (det konsistente) systemet* $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$*. Ved hjelp av Matlab-utskriften finner vi at*

$$\hat{\mathbf{x}} = (2, -1, 0) + t\,(1, 1, -2)$$

der $t \in \mathbb{R}$*. Alternativt kunne vi ha bestemt* $\hat{\mathbf{x}}$ *ved å løse normallikningene* $A^T A\,\mathbf{x} = A^T\,\mathbf{b}$*, dvs systemet* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

□

Anta nå at $\mathbb{R}^3$ er utsyrt med det vektede indreproduktet gitt ved

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2\,x_1 y_1 + 2\,x_2 y_2 + \,x_3 y_3$$

for $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ i $\mathbb{R}^3$.

1d

Finn en ortogonal basis for W. Beregn deretter den ortogonale projeksjonen $\mathbf{q}$ av $\mathbf{y} = (0, -1, -5)$ ned i W.

Løsning: Vi bruker Gram-Schmidt på vektorene $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)$ *og* $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1)$ *(som gir en basis for* W*). Siden* $\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle = 2 + 0 - 1 = 1$ *og* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle = 2 + 0 + 1 = 3$*, får vi at vektoren*

$$\mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle}{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle}\,\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{a}_1 = (2/3, 2, 4/3) = \frac{2}{3}(1, 3, 2)$$

er ortogonal på $\mathbf{a}_1$*. Så mengden bestående av* $\mathbf{v}_1 := \mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)$ *og* $\mathbf{v}_2 := (1, 3, 2)$ *er en ortogonal basis for* W*.*
Videre har vi at

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 + 0 + 5 = 5, \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 3,$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 - 6 - 10 = -16, \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = 2 + 18 + 4 = 24.$$

(Fortsettes på side 3.)

Så vi får at den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ *ned i* W *er*

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{5}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{(-16)}{24}\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{5}{3}(1,0,-1) - \frac{2}{3}(1,3,2) \\ &= (1,-2,-3) = \mathbf{p}\end{aligned}$$

□

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2a

Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.

Løsning: Finner at $A\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1$ *og* $A\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 = 1\mathbf{v}_2$*, så begge er egenvektorer for* A *tilhørende egenverdien* 1.
Ser deretter på $A\,\mathbf{x} = 2\,\mathbf{x}$ *og finner at dette systemet har ikke-trivielle løsninger, f.eks.* $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 1)$*. Så* 2 *er en egenverdi for* A*. Alternativt kan man regne ut at* $\det(A - 2I) = 0$*, som også gir at* 2 *er en egenverdi.*

□

2b

Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.

Løsning: I 2a fant vi at $\mathbf{v}_3$ *ligger i egenrommet* E_2*. Ser ellers at* $\mathbf{v}_1$ *og* $\mathbf{v}_2$ *er lineært uavhengige, og vi vet at disse ligger i et annet egenrom, nemlig* E_1*. Vektorene* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *og* $\mathbf{v}_3$ *er da automatisk lineært uavhengige (noe som lett kan sjekkes). Nå er* $\mathbb{R}^3$ *3-dimensjonalt, så vi kan konkludere at disse tre vektorene danner en basis for* $\mathbb{R}^3$*. Siden den består av egenvektorer for* A *viser dette at* A *er diagonaliserbar (siden matrisen* $P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ *da er invertibel og slik at* $A = PDP^{-1}$ *der* $D = \operatorname{diag}(1, 1, 2)$*).*

Vi har videre at $A^{10}\,\mathbf{v}_j = 1^{10}\,\mathbf{v}_j = 1\,\mathbf{v}_j$ *for* $j = 1, 2$ *og at* $A^{10}\,\mathbf{v}_3 = 2^{10}\,\mathbf{v}_3$*. Så 1 og* $2^{10} = 1024$ *er egenverdier for* A^{10}*. Siden* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *og* $\mathbf{v}_3$ *gir en basis for* $\mathbb{R}^3$ *kan ikke* A^{10} *ha andre egenverdier enn disse to.*
Alternativt kan vi bruke at

$$A^{10} = (PDP^{-1})^{10} = PD^{10}P^{-1} = P\,\operatorname{diag}(1, 1, 2^{10})P^{-1}$$

(Fortsettes på side 4.)

Det viser at A er similær med $\mathrm{diag}(1, 1, 2^{10})$*, så egenverdiene til A^{10} er 1 og* $2^{10} = 1024$*.*

□

2c

Finn den generelle løsningen av diff.likning systemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

der $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Bestem deretter løsningen som tilfredstiller at $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$.

Løsning: Vi bruker at matrisen $P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ diagonaliserer A. Den generelle løsningen av systemet er da gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1\,\mathbf{v}_1\,e^t + c_2\,\mathbf{v}_2\,e^t + c_3\,\mathbf{v}_3\,e^{2t}$$

og det gir at

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -(c_1 + c_2)e^t - c_3e^{2t} \\ c_1e^t + c_3e^{2t} \\ c_2e^t + c_3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsen $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$ gir at $P(c_1, c_2, c_3) = (1, -1, 1)$. Ved hjelp av den vedlagte Matlab-utskriften finner vi at da er $c_1 = -2, c_2 = 0, c_3 = 1$, dvs at

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ -2e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

□

Oppgave 3

La $a \in \mathbb{R}$, og la $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være den kvadratiske formen gitt ved

$$Q(\mathbf{x}) = a\,x_1^2 - 2\,x_1x_2 + a\,x_2^2$$

for $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. For hvilke verdier av a er Q positiv definit?

Løsning: Vi har at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ der $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ er symmetrisk. Det karateristiske polynomet til A er $p_A(\lambda) = (\lambda - a)^2 - 1$, så egenverdiene til A er $\lambda = a \pm 1$. Vi vet at Q er positiv definit hvis og bare hvis egenverdiene til A alle er positive. Så vi får at Q er positiv definit hvis og bare hvis $a \pm 1 > 0$, dvs $a > 1$.

□

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4

La n være et naturlig tall og la V være et vektorrom med dimensjon n. Anta at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for V (ordnet i den oppgitte rekkefølgen). For hver $k = 1, 2, \ldots, n$ definer

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_k.$$

Altså: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, etc.

Sett $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$. Videre, la $\mathbf{v} \in V$ være gitt ved

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \cdots + \mathbf{b}_n.$$

Så alle vektene i summen ovenfor er 1, unntatt den første som er 2.

4a

Begrunn først at $\mathcal{C}$ er en basis for V. Finn deretter koordinatvektorene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ og $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$. (Vi betrakter $\mathcal{C}$ som ordnet i den oppgitte rekkefølgen.)

Løsning: Sett $M = \begin{bmatrix} [\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\mathbf{c}_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$. *Da er*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dvs. M *er øvre triangulær med bare enere på og over hoveddiagonalen. Da er* $\det(M) = 1 \neq 0$, *så* M *er invertibel. Notat 1 gir da at* $\mathcal{C}$ *en basis for* V. *Definisjonen av koordinatvektorer tilsier at* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (2, 1, 1, \ldots, 1)$. *Videre har vi at* $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_n = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_n$, *så* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = (1, 0, 0, \ldots, 0, 1)$. □
□

Anta nå at $n = 4$. La $T : V \to V$ være lineæravbildningen bestemt ved

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}_1) &= \mathbf{b}_1, \\ T(\mathbf{b}_2) &= -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \\ T(\mathbf{b}_3) &= 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ T(\mathbf{b}_4) &= -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

4b

Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ og $[T]_{\mathcal{C}}$. Er T en isomorfi?

(Fortsettes på side 6.)

Løsning: Vi har at

$$[T]_{\mathcal{B}} = \Big[[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_4)]_{\mathcal{B}}\Big] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ ikke er invertibel (fordi siste raden er null, eller fordi den har determinant lik 0). Notat 2 gir da at T er ikke en isomorfi. Alternativt kan vi observere at bildet til T er inneholdt i underrommet $\mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$*, som er 3-dimensjonalt. Siden V er 4-dimensjonalt er $T(V) \neq V$, så T er ikke på V. Dermed er T ikke en isomorfi.*

Vi har videre at

$T(\mathbf{c}_1) = T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1\,,$

$T(\mathbf{c}_2) = T(\mathbf{b}_1) + T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = -\mathbf{c}_2\,,$

$T(\mathbf{c}_3) = T(\mathbf{c}_2) + T(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_3,$

$T(\mathbf{c}_4) = T(\mathbf{c}_3) + T(\mathbf{b}_4) = \mathbf{c}_3 - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{0},$

Det gir at

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man utlede at

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og bruke at $[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$, men det gir mere regning.

□

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 7.)

Matlab-utskrift.

```
>> B

B =

     1          1          1          1
     0          2          1         -2
    -1          1          0         -3

>> rref(B)

ans =

       1          0        1/2          2
       0          1        1/2         -1
       0          0         0           0


>> C

C =

      -1         -1         -1          1
       1          0          1         -1
       0          1          1          1

>> rref(C)

ans =

       1          0          0         -2
       0          1          0          0
       0          0          1          1
```