UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 4 desember, 2020
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	En Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Se første siden i Inspera.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1a

Finn en basis $\mathcal{B}$ for kolonnerommet til A som består av kolonnevektorer til A. Skriv kolonnevektorene til A som ikke er med i basisen $\mathcal{B}$ som lineære kombinasjoner av vektorene i $\mathcal{B}$.

Løsning. Skriv $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5]$. Den reduserte trappeformen R til A, som er oppgitt i Matlab-vedlegget, har pivoter i 1, 2 og 4 kolonne. Det gir at $\mathcal{B} := \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ er en basis for $\operatorname{Col} A$.

De lineære avhengighetsrelasjonene mellom kolonnene i A er de samme som de mellom kolonnene i R. Vi ser fra R at vi får

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\,, \quad \mathbf{a}_5 = -\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4.$$

1b

Bestem $\dim(\operatorname{Nul} A)$. Finn en 5×3 matrise B som er slik at $\operatorname{rank} B = 2$ og $AB = O$ ($= 4 \times 3$ nullmatrisen).

(Fortsettes på side 2.)

Løsning. Siden R har nøyaktig 2 kolonner som ikke inneholder pivoter får vi at $\dim(\operatorname{Nul} A) = 2$.

Betrakt nå en 5×3 matrise $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$. Da er $AB = [A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3]$, så vi har at $AB = O$ hvis og bare hvis $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ og $\mathbf{b}_3$ alle ligger i $\operatorname{Nul} A$. Siden

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad -\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$$

ser vi at $\mathbf{b}_1 := (1, -1, -1, 0, 0)$ og $\mathbf{b}_2 := (-1/2, -1/2, 0, 1/2, -1)$ begge ligger i $\operatorname{Nul} A$. Vi ser også at $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ ikke er multipler av hverandre, så de er lineært uavhengige. (Alternativt kunne vi bare bestemt en basis for $\operatorname{Nul} A$ på vanlig måte). Vi velger derfor f.eks.

$$B := [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og får da at $AB = O$. Siden $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ er lineært uavhengig og $\operatorname{Col} B = \operatorname{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, får vi at $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ er en basis for $\operatorname{Col} B$. Dermed er $\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Col} B = 2$, som ønsket.

Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2a

Begrunn at A er diagonaliserbar. Bestem en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A.

Løsning. Fra Matlab-vedlegget får vi at

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 0) = -\lambda(\lambda + 1)^2.$$

Det gir at A har to forskjellige egenverdier, $\lambda_1 = 0$ med (algebraisk) multiplisitet 1, og $\lambda_2 = -1$ med (algebraisk) multiplisitet 2. Da vet vi at A vil være diagonaliserbar dersom egenrommet $E^A_{(-1)} = \operatorname{Nul}(A + I)$ har dimensjon lik 2. Nå er

$$\operatorname{Nul}(A+I) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Span}\{(1,1,0), (1,0,-1)\},$$

så vi får at $\{(1,1,0), (1,0,-1)\}$ er en basis for $E^A_{(-1)}$. Dermed er $\dim E^A_{(-1)} = 2$, og det følger at A er diagonaliserbar.

(Fortsettes på side 3.)

Videre har vi at $E_0^A = \operatorname{Nul} A = \operatorname{Span}\{(2,1,0)\}$. Vektorene $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ og $\mathbf{v}_3 = (2,1,0)$ er da automatisk lineært uavhengige, og de gir en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A.

2b

Fikser en vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ og betrakt følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k, \quad k \geq 0.$$

Begrunn at $\|\mathbf{x}_k\| = C$ for alle $k \geq 1$ for en konstant $C \geq 0$,
der $\|\mathbf{x}\| := \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$ når $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Løsning. Siden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ kan vi skrive

$$\mathbf{x}_0 = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3$$

for passende $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Siden $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ får vi at

$$\mathbf{x}_k = c_1\,A^k\mathbf{v}_1 + c_2\,A^k\mathbf{v}_2 + c_3\,A^k\mathbf{v}_3 = c_1\,(-1)^k\mathbf{v}_1 + c_2\,(-1^k)\mathbf{v}_2 + \mathbf{0}$$

for alle $k \geq 1$. Dermed er

$$\|\mathbf{x}_k\| = \|(-1)^k(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2)\| = \|c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2\|$$

for alle $k \geq 1$. Dette viser at påstanden holder med $C := \|c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2\|$
$(= \|(c_1 + c_2, c_1, -c_2)\| = \sqrt{2(c_1^2 + c_2^2 + c_1c_2)})$.

Oppgave 3

La $\mathbb{P}_2$ betegne vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel x. Sett $p_1(x) = x - 1$ og $p_2(x) = x^2$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og la W være underrommet av $\mathbb{P}_2$ som er utspent av p_1 og p_2.

3a

Betrakt følgende punkter i xy-planet: $(-1,1), (0,1)$ og $(1,1)$.

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme de reelle tallene $\hat{c}_1$ og $\hat{c}_2$ som gir at polynomet $\hat{c}_1\,p_1 + \hat{c}_2\,p_2$ tilpasser disse punktene best mulig, i den forstand at utrykket

$$\left((p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 1)^2\right)^{1/2}$$

oppnår sitt minimum blant polynomene p i W når $p = \hat{c}_1\,p_1 + \hat{c}_2\,p_2$.

Løsning. Teorien for lineære modeller gir at vi må finne minste kvadraters løsning $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)$ av systemet $X(c_1, c_2) = (1,1,1)$, der designmatrisen X er gitt ved

(Fortsettes på side 4.)

$$X = \begin{bmatrix} p_1(-1) & p_2(-1) \\ p_1(0) & p_2(0) \\ p_1(1) & p_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette kan vi gjøre ved å løse de assosierte normale likningene

$$X^T X(c_1, c_2) = X^T(1, 1, 1).$$

Utregning gir

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad X^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

så vi finner at

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

altså at polynomet $p(x) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x^2$ gir den beste tilpasning til de oppgitte punktene.

3b

Vi betrakter nå $\mathbb{P}_2$ som et indreprodukt rom med hensyn på indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in \mathbb{P}_2.$$

La W være som ovenfor, og la $q \in \mathbb{P}_2$ være gitt ved $q(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Finn en ortogonal basis for W og bestem den ortogonale projeksjonen av q ned i W.

Løsning. Siden p_1 og p_2 er lineært uavhengige (de er ikke multiplum av hverandre) og de utspenner W, er $\{p_1, p_2\}$ en basis for W. Gram-Schmidt prosessen gir at en ortogonal basis $\{q_1, q_2\}$ for W er gitt ved

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1.$$

Siden

$$\langle p_2, q_1 \rangle = (-1)^2(-2) + 0 + 0 = -2,$$
$$\langle q_1, q_1 \rangle = (-2)^2 + (-1)^2 + 0 = 5$$

finner vi at $q_1(x) = x - 1$, $q_2(x) = x^2 + \frac{2}{5}(x-1)$ gir en ortogonal basis for W.

Vi vet at den ortogonale projeksjonen av q ned i W er polynomet $\hat{q}$ i W som best approksimerer q. Dette betyr at når p varierer i W, så er uttrykket $\|q - p\|$ minst mulig når $p = \hat{q}$. Siden

$$\|q - p\| = \|p - q\| = \Big((p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 1)^2 \Big)^{1/2}$$

(Fortsettes på side 5.)

får vi fra a) at $\hat{q}(x) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}\,x^2$.

Alternativt kan man i stedet bruke at $\hat{q}$ er gitt ved

$$\hat{q} = \frac{\langle q, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 + \frac{\langle q, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2,$$

og at

$$\langle q, q_1\rangle = -2 - 1 + 0 = -3,$$
$$\langle q, q_2\rangle = 1/5 - 2/5 + 1 = 4/5,$$
$$\langle q_2, q_2\rangle = 1/25 + 4/25 + 1 = 6/5.$$

Det gir at $\hat{q} = -\frac{3}{5}\,q_1 + \frac{4/5}{6/5}\,q_2 = -\frac{3}{5}q_1 + \frac{2}{3}q_2$, dvs

$$\hat{q}(x) = -\frac{3}{5}(x-1) + \frac{2}{3}\Big(x^2 + \frac{2}{5}(x-1)\Big) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}\,x^2.$$

3c

Beregn avstanden fra q til underrommet W ovenfor og finn en basis for $W^\perp$ (det ortogonale komplementet til W).

Løsning. Avstanden fra q til W er $d = \|q - \hat{q}\| = \|\hat{q} - q\|$.

Siden $\hat{q}(-1) = 4/3$, $\hat{q}(0) = 1/3$ og $\hat{q}(1) = 2/3$, får vi at

$$d = \Big((4/3-1)^2 + (1/3-1)^2 + (2/3-1)^2\Big)^{1/2} = \sqrt{2/3}.$$

Videre vet vi at $q - \hat{q}$ er ortogonal på W, dvs $q - \hat{q} \in W^\perp$. Siden W har dimensjon 2 og $\mathbb{P}_2$ har dimensjon 3, må $\dim W^\perp = 1$ (for hvis den var større ville $\mathbb{P}_2$ inneholde minst 4 ortonormale vektorer). Dermed er $\{q - \hat{q}\}$ en basis for $W^\perp$. Nå er

$$(q - \hat{q})(x) = 1 - \Big(-\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}\,x^2\Big) = \frac{1}{3}(x+2) - \frac{2}{3}\,x^2,$$

så $\{2 + x - 2x^2\}$ er også en basis for $W^\perp$.

Oppgave 4

La $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ og la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sett også

$$S = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\big\}.$$

Vi betrakter $\mathbb{R}^2$ med sitt vanlig indreprodukt (dvs prikkproduktet).

(Fortsettes på side 6.)

4a

Begrunn at A er positiv definitt. Finn en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ for $\mathbb{R}^2$ som er slik at $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Løsning. Som vist i boka, er A positiv definitt hvis og bare hvis A er symmetrisk og har bare positive egenverdier. Det er klart at $A^T = A$, så A er symmetrisk. Videre, har vi at

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$$

Så egenverdiene til A er 1 og 6, som begge er positive. Dermed er A positiv definitt.

Vi vet at matrisen $[T]_\mathcal{B}$ relativt til en basis $\mathcal{B}$ er diagonal hvis vektorene i $\mathcal{B}$ er egenvektorer for A. Nå er egenrommene til A gitt ved

$$E_1^A = \mathrm{Nul}(A - I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\},$$

$$E_6^A = \mathrm{Nul}(A - 6I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Siden A er symmetrisk er E_1^A og E_2^A ortogonale på hverandre (noe vi også ser). Så $\mathcal{B} := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, der

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ som er slik at

$$T(\mathbf{u}_1) = A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \quad T(\mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_2 = 6\mathbf{u}_2.$$

Dermed får vi at $[T]_\mathcal{B} = \big[\, [T(\mathbf{u}_1)]_\mathcal{B} \;\; [T(\mathbf{u}_2)]_\mathcal{B} \,\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4b

Finn 2×2 matrisen Q som er slik at $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = Q\,\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Anta at $\mathbf{y} \in \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}$ og sett $(y_1', y_2') := [\mathbf{y}]_\mathcal{B}$. Vis at

$$(y_1')^2 + \frac{(y_2')^2}{6^2} = 1$$

(som er likningen for en ellipse på standard form i $\mathcal{B}$-koordinater).

Løsning. La $\mathcal{C}$ betegne standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og sett $P := P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, så

$$P = [\mathbf{u}_1 \; \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 7.)

Matrisen vi skal finne er $Q = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = P^{-1}$. Siden $\mathcal{B}$ er ortonormal, er P ortogonal, så vi får at

$$Q = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Anta $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ for en $\mathbf{x} \in S$. Sett $(x_1', x_2') := [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = Q\,\mathbf{x}$.

Med $D := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ vet vi at $A = PDP^{-1}$. Da er $QA = DQ$, så

$$(y_1', y_2') = [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = Q\,\mathbf{y} = QA\,\mathbf{x} = DQ\,\mathbf{x} = D(x_1', x_2') = (x_1', 6x_2').$$

Siden en ortogonal matrise er norm-bevarende og $\mathbf{x} \in S$, har vi at

$$1 = \|\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}'\|.$$

Vi får derfor at $(y_1')^2 + \frac{(y_2')^2}{6^2} = (x_1')^2 + (x_2')^2 = \|\mathbf{x}'\|^2 = 1$, som ønsket.

4c

La B være en $n \times n$ reell matrise som er positiv definitt. Begrunn at B er invertibel, og at B^{-1} er positiv definitt.

Løsning. Siden B er positiv definitt, er B symmetrisk og har bare positive egenverdier. Vi kan da finne en ortogonal $n \times n$ matrise P og en diagonal $n \times n$ matrise $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ slik at $B = PDP^T$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Siden $P^T = P^{-1}$ får vi at

$$\det(B) = \det(PDP^{-1}) = \det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0\,,$$

og det gir at B er invertibel. (Alternativt kan man begrunne at B er invertibel ved å henvise til at den er produktet av tre invertible matriser.)

For å vise at B^{-1} er positiv definitt kan vi sjekke at den er symmetrisk og har bare positive egenverdier. Vi merker oss først at

$$B^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$

så B^{-1} er similær med diagonal matrisen $D^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$. Det gir at egenverdiene til B^{-1} er $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$, og alle disse er positive siden alle λ_j-ene er det. Vi får også at

$$B^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^T.$$

Det viser at B^{-1} er ortogonalt diagonaliserbar, og dermed symmetrisk. (Alternativt, kan man skrive at $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1} = B^{-1}$ hvis man kjenner til at første likhet holder for enhver invertibel matrise, eller begrunner denne). Vi kan nå konkludere at B^{-1} positiv definitt.

(Fortsettes på side 8.)

Matlab-utskrift.

```
>> A =  [1 0 1 1 0; 0 1 -1 1 0; 1 0 1 3 1; -1 1 -2 0 0]

A =

     1     0     1     1     0
     0     1    -1     1     0
     1     0     1     3     1
    -1     1    -2     0     0

>> R = rref(A)

R =

       1              0              1              0            -1/2
       0              1             -1              0            -1/2
       0              0              0              1             1/2
       0              0              0              0              0


>> A = [ 1  -2   2; 1  -2   1;  0   0  -1]

A =
     1    -2     2
     1    -2     1
     0     0    -1

>> poly(A)

ans =

    1   2    1    0
```