MAT1120 – Løsning av Oppgave 3 i Notat 2

La $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ *være lineær avbildningen gitt ved*

$$T(p) = \big(p(1), p'(1), p''(1)\big)\,.$$

Er T *1-1 og/eller på* $\mathbb{R}^3$ *?*

Vi lar $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ og $\mathcal{C}$ være standardbasisene for henholdsvis $\mathbb{P}_3$ og $\mathbb{R}^3$, og lar M være matrisen til T realtivt til $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$. Utregning gir at

$$M = \Big[\, [T(1)]_{\mathcal{C}}\ [T(t)]_{\mathcal{C}}\ [T(t^2)]_{\mathcal{C}}\ [T(t^3)]_{\mathcal{C}} \,\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nok en utregning gir at R:=rref(M) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Hvis vi lar $T_M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $T_M(\mathbf{x}) = M\,\mathbf{x}$ når $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, har vi da at T_M ikke er 1-1 (fordi R ikke har pivoter i alle kolonner), og at T_M er på $\mathbb{R}^3$ (fordi R har pivoter i alle rader).

Ved Teorem A i Notat 2 kan vi konkludere med at T ikke er 1-1, og at T er på $\mathbb{R}^3$. (Siden $\mathbb{P}_3$ har dimensjon 4, mens $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 3, kunne vi brukt Oppg. 1 (i) til å si at T umulig kunne være 1-1).