5.3 Diagonalisering

La
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Videre er
$$D^2 = D \cdot D = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & 0 \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$D^k = D \cdot D^{k-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Hvis $A = PDP^{-1}$, så er
$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}.$$

Definisjon. La A være en $n \times n$ matrise. Hvis vi kan skrive $A = PDP^{-1}$ for en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D kalles A diagonaliserbar.

Teorem 5.5 (Diagonaliseringsteoremet)

- En $n \times n$ matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.
- $A = PDP^{-1}$ hvis og bare hvis
$$P = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \cdots \; \vec{v}_n] \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
der $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ er lineært uavhengig og $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

Merknad. Vi kan ekvivalent si at A er diagonaliserbar dersom det finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ som består utelukkende av egenvektorer til A.

Bevis. Anta at A er diagonaliserbar med
$$P = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \cdots \; \vec{v}_n] \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
for lineært uavhengige vektorer $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ og tall λ_j for $j = 1, 2, \dots, n$. Videre er
$$AP = [A\vec{v}_1 \; A\vec{v}_2 \; \cdots \; A\vec{v}_n] \quad \text{og}$$
$$PD = [\lambda_1\vec{v}_1 \; \lambda_2\vec{v}_2 \; \cdots \; \lambda_n\vec{v}_n].$$
Hvis $A = PDP^{-1}$ er $AP = PD$, så følgelig er $A\vec{v}_j = \lambda_j \cdot \vec{v}_j$ for $j = 1, 2, \dots, n$. Da har A n lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer, så gir den samme utregningen (baklengs) at $A = PDP^{-1}$ med
$$P = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \cdots \; \vec{v}_n] \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Eksempel 5.3.3

Diagonalisere matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ om mulig.

① Finn egenverdiene.
$$0 = \det(A - \lambda I) = \cdots = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$
$$\cdots = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Egenverdiene er $\lambda = 1$ og $\lambda = -2$.

② Finn egenrommene.

- For $\lambda = 1$ har vi en basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- For $\lambda = -2$ må vi løse $(A + 2I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hvis $(A + 2I)\vec{x} = \vec{0}$, så må $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Generell løsning
$$\vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$
som gir basisen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

③ "Velg" P fra egenvektorene (om vi har nok). Vi vet fra Teorem 5.2 at basisvektorene fra forskjellige egenverdier er lineært uavhengige. Siden A er 3×3 og vi har 3 lineært uavhengige egenvektorer, så er A diagonaliserbar.

$$\begin{array}{cc} P = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda=1 & \lambda=-2 & \lambda=-2 \end{array} \end{array}$$

④ Skriv opp D. (Pass på rekkefølgen.)
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$