Korollar. Hvis A har en egenverdi λ med geometrisk multiplisitet < algebraisk multiplisitet, så er A ikke diagonaliserbar.

Oppgave 5.3.8

Diagonaliser $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ om mulig.

① $\det(A-\lambda I) = (5-\lambda)^2$. Egenverdien er $\lambda = 5$.

② Ser på $(A-5I)\vec{x} = \vec{0}$, dvs. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så generell løsning er

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Basis for egenrommet er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

③ A er ikke diagonaliserbar.

Oppgave 5.3.32

En 7×7 matrise har tre forskjellige egenverdier. Ett av egenrommene er to-dimensjonalt og ett annet er tre-dimensjonalt. Kan A ikke være diagonaliserbar?

Trenger 7 lineært uavhengige egenvektorer for diagonalisering.

λ_1 : 2
λ_2 : 3
λ_3 : 1 eller 2

Hvis egenrommet til λ_3 har dimensjon 1, så er A ikke diagonaliserbar.

$$\begin{bmatrix} \pi & & & & & & \\ & \pi & & & & 0 & \\ & & e & & & & \\ & & & e & & & \\ & & & & e & & \\ & 0 & & & & 5 & 1 \\ & & & & & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Teorem 5.6

Hvis en $n \times n$ matrise A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Bevis. Teorem 5.2 gir oss n lineært uavhengige egenvektorer. Ved Teorem 5.5 er A diagonaliserbar. □

Eksamen 2016: Oppgave 4

(a) $\underline{\lambda_2 = 1}$. Vi vil løse $(A - 1I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matlab-vedlegg

Generell løsning $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ av $(A-1I)\vec{x} = \vec{0}$ må oppfylle

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}x_3 \end{aligned} \iff \vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor til λ_2 er $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så $\lambda_1 = 2$.

$$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Så her er $\lambda_3 = 1/2$.

Egenverdi og egenvektor:

$\lambda_1 = 2$ og $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 1/2$ og $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

(b) A er diagonaliserbar fordi den har tre forskjellige egenverdier og er 3×3.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(c) Regn ut $\lim_{k \to \infty} \vec{x}_k$ for $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\vec{x}_k = A\vec{x}_{k-1}$.

Vi vil skrive

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = P\vec{c}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Da er

$$\vec{c} = P^{-1}\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Matlab vedlegg.

Altså er

$$\vec{x}_0 = 3\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = 3 \cdot \lambda_2 \vec{v}_2 - 2 \cdot \lambda_3 \vec{v}_3 \\ &\vdots \\ \vec{x}_k &= A^k\vec{x}_0 = 3 \cdot \lambda_2^k \vec{v}_2 - 2 \cdot \lambda_3^k \vec{v}_3 \\ &= 3 \cdot \vec{v}_2 - 2 \cdot (1/2)^k \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Følgelig

$$\lim_{k \to \infty} \vec{x}_k = 3\vec{v}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$