Forelesning 23/8

Hva har vi tidligere lært i lineær algebra?

$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ søylevektor (vi holder oss stort sett til søylevektorer: $\vec{b}$ er søylevektor hvis ikke annet er presisert

$[b_1 \; b_2 \cdots b_n]$

skriver også $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ for en søylevektor.

Vektorer er med fet skrift, lowercase
Matriser er med store bokstaver.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ er en $m \times n$-matrise: m rader, n søyler.

Addisjon av vektorer/matriser
Skalar multiplikasjon
} komponentvis:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 2+1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Matrisemultiplikasjon (dimensjonene må matche.)

Inverse matriser (TL 4.5)

Løse likningssystemer ved radredusering
trappeform, pivoter

Lineære kombinasjoner

Lineær uavhengighet / basiser (også i 4.3 i Lay)

} TL 4.6

Determinanter (TL 4.9) (kap 3 i Lay)

Egenvektorer / egenverdier (TL 4.10, kap. 5 i Lay)

Matlab-kommandoer:

A * B	matrisemult.
A .* B	komponentvis mult.
c * x	mult. med skalar
rref	
null	finne nullrommet til en matrise.
rank	
inv	invers
det	
A \ b	returnerer x s.a. Ax = b

Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ fås i matlab ved [1 2; 2 1]

Nye ting: 1. Koordinatskifter (seksjon 4.6)
2. Indreprodukter, minste kvadraters metode (kap. 6)
3. SVD og kvadratiske former (kap. 7)

Seksjon 4.1

I MAT1110: Alt foregikk i $\mathbb{R}^n$
MAT1120: Vil jobbe mer generelt i vektorrom.

Definisjon Et vektorrom er et ikketomt sett V av objekter (vektorer) der det er definert to operasjoner:

a) addisjon $\underbrace{\vec{u}}_{\in V} + \underbrace{\vec{v}}_{\in V}$

b) skalar multiplikasjon $\underbrace{c}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\vec{u}}_{\in V}$

og der følgende 10 aksiomer er oppfylt, der $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $c, d \in \mathbb{R}$:

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. Det finnes en nullvektor $\vec{0}$ i V s.a. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
5. Det finnes en vektor $-\vec{u}$ s.a. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
6. $c\vec{u} \in V$
7. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
8. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
9. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
10. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Følger fra dette: $-\vec{u}$ er unik (oppgave 34).

Eksempler på vektorrom

ex 1 $\mathbb{R}^n$ med vanlig vektoraddisjon / skalar multiplikasjon

ex 3 S mengden av uendelige følger på formen

$$\{y_k\} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)$$

der addisjon / skalarmultiplikasjon defineres komponentvis:

$$(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) + (\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots) = (\dots, y_{-1}+z_{-1}, y_0+z_0, y_1+z_1, \dots)$$

$$c(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) = (\dots, cy_{-1}, cy_0, cy_1, \dots)$$

sjekk at aksiomene er tilfredsstilt, og at

$$\vec{0} = (\dots, 0, 0, 0, \dots)$$

$$-\{\vec{y}_k\} = (\dots, -y_{-1}, -y_0, -y_1, \dots)$$

ex 4 $\mathbb{P}^n$: mengden av polynomer av grad $\leq n$.

$$\vec{p}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

Hvis $\vec{q}(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$ så er

$$(\vec{p}+\vec{q})(t) \overset{def}{=} \vec{p}(t) + \vec{q}(t)$$

$$= a_0 + b_0 + (a_1+b_1)t + \dots + (a_n+b_n)t^n$$

$$(c\vec{p})(t) \overset{def}{=} c\vec{p}(t) = ca_0 + ca_1 t + \dots + ca_n t^n$$

nullvektoren $\vec{0} = 0 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^n = 0$

$$-\vec{p} = -a_0 - a_1 t - \dots - a_n t^n$$

ex 5 Alle reelle funksjoner (kan være definert på hele $\mathbb{R}$, et intervall, eller mer generelle mengder.

Definisjon Et underrom av et vektorrom V er et subsett H av V som tilfredsstiller

a) nullvektoren $\vec{0}$ i V er også i H

b) H er lukket under addisjon: $\vec{u}, \vec{v} \in H \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in H$

c) H er lukket under skalarmultiplikasjon: $\vec{u} \in H,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u} \in H$

(se også 4.7 i TL)

Et underrom er også et vektorrom.

La oss verifisere aksiom 5, at $-\vec{u} \in H$ når $\vec{u} \in H$:

Vi får først fra c) $(-1)\vec{u} \in H$

Videre er $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$ siden

$$\vec{u} + (-1)\vec{u} \overset{ax.10}{=} 1\vec{u} + (-1)\vec{u} \overset{ax.8}{=} (1+(-1))\vec{u} = 0\vec{u} \overset{(1)\ s.227}{=} \vec{0}$$

Siden $-\vec{u}$ er unik (oppg. 34) så må $-\vec{u} = (-1)\vec{u} \in H$

Eksempler på underrom

ex 7 $\mathbb{P}$ = polynomer med reelle koeffisienter

Lett å sjekke at

1/ $\mathbb{P}$ er et underrom av $\underbrace{\text{rommet av alle reelle funksjoner}}_{\text{ex. 5}}$.

2/ $\underbrace{\mathbb{P}^n}_{\text{ex 4}}$ er et underrom av $\mathbb{P}$

Det er klart at $\vec{0}$ ligger i alle disse rommene.

ex 8 S_f er alle $(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) \in \underbrace{S}_{\text{ex.3}}$ der kun endelig mange y_i'er er $\neq 0$.

(antall "ikkenuller" i $\{y_k\} + \{z_k\}$ $\leq$ antall ikkenuller i $\{y_k\}$ + antall ikkenuller i $\{z_k\}$

Hvis $\{y_k\} \in S_f$, $\{z_k\} \in S_f$, så følger det fra dette at $\{y_k\} + \{z_k\} \in S_f$

ex 10 Et $\underbrace{\text{plan gjennom origo}}$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$:

punkter som tilfredsstiller $a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$

Lukket under addisjon: $\underbrace{a y_1 + b y_2 + c y_3 = 0}_{\text{Legg sammen}}$

$$a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) + c(x_3 + y_3) = 0$$

slik at $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ også er i planet.

Et plan som ikke går gjennom origo er ikke et underrom.

Husk at $\underbrace{\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}}_{\text{Spennet av } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p} = \left(\sum_{i=1}^{p} c_i \vec{v}_i \ : \ c_i \in \mathbb{R} \right)$

Span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er et underrom av V:

Lukket under addisjon: $\underbrace{b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2}_{\in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}} + \underbrace{d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2}_{\in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}}$

$(b_1+d_1)\vec{v}_1 + (b_2+d_2)\vec{v}_2 \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

$c(b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2) = cb_1\vec{v}_1 + cb_2\vec{v}_2$

Mer generelt:

Teorem 1: Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in V$ så er Span $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ et underrom av V.