Forelesning 25/8

Fortsetter med underrom i sek. 4.1

Sek 4.2

Oppgave 4.1.12

La W være settet av vektorer på formen $\begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix}$. Er W et underrom av $\mathbb{R}^4$?

Løsning:

$$\begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 2s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t \\ -t \\ -t \\ 4t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dette viser at $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Fra teorem 1 følger at W er et underrom av $\mathbb{R}^4$ ■

Eksempel 13 For hvilke h er $\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$ i spennet av

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

Løsning: Sett opp matrisen $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{y}]$, og radreduser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}$$

$h = 5$: Siste søyle ikke pivotsøyle.
TL 4.6.2 (iii) sier da at $\vec{y}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ på uendelig mange måter (siden søyle 3 heller ikke er pivotsøyle)

$h \neq 5$ Siste søyle er pivotsøyle.
TL 4.6.2 (i) sier da at $\vec{y}$ ikke kan skrives som en slik lineær kombinasjon.

Oppgave 4.1.44 (prog. oppgave)

Er $\vec{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ i spennet av søylene til $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 8 & 7 & -6 \\ -5 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}$

Løsning: Radreduserer $[A \ \vec{y}]$ og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste søyle er ikke en pivotsøyle, mens alle andre søyler er det. TL 4.6.2 (ii) sier da at $\vec{y}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av søylene i A på en unik måte ■

Seksjon 4.2

Definisjon:
La A være en $m \times n$-matrise.
Løsningsrommet $\text{Nul}\, A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ kalles nullrommet til A.

Teorem 2 Nullrommet til en $m \times n$-matrise er et underrom av $\mathbb{R}^n$

Bevis: Anta $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Nul}\, A$, slik at $A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}$.
Da er $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
$A(c\vec{u}) = cA\vec{u} = c \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
Siden også $A\vec{0} = \vec{0}$ så er $\text{Nul}\, A$ et underrom av $\mathbb{R}^n$ ∎

Hvordan finne nullrommet til en matrise A?

Bring A på redusert trappeform!

Eks: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Dette sier at, i en løsning for $A\vec{x} = \vec{0}$ ← skrives ikke opp må $x_1 = 0$
$x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3$

Vi får: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, slik at $\text{Nul}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ∎

Oppg 4 Finn nullrommet til $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi radreduserer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ser nå at $x_1 - 6x_2 = 0$, $x_3 = 0$, slik at $x_1 = 6x_2$, $x_3 = 0$, x_2, x_4 frie

Vi får: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Slik at $\text{Nul}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ∎

Definisjon: Søylerommet til en $m \times n$ matrise A består av alle lineærkombinasjoner av søyler i A.
Betegnes $\text{Col } A$:
Hvis $A = [\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n]$, så er $\text{Col } A = \text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$.

Teorem 3 Søylerommet til en matrise er et underrom av $\mathbb{R}^m$

Alternativt: $\text{Col } A = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$

$\vec{b} \in \text{Col } A \Leftrightarrow$ finnes en $\vec{x}$ slik at $A\vec{x} = \vec{b}$

Fra TL: Basis for søylerommet finnes ved radreduksjon:
Pivotsøylene danner basis.

Definisjon: Radrommet til en $m \times n$-matrise A består av alle lineærkombinasjoner av rader i A. Betegnes $\text{Row } A$

Radrommet er et underrom, siden den også er et spenn.

Sammenheng mellom Nul A og Col A

Nul A : ikke-pivotsøyler svarer til frie variable når vi løser $A\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ dim Nul A = antall ikke-pivotsøyler.

Col A : pivotsøyler er basis $\Rightarrow$ dim Col A = antall pivotsøyler

Siden antall ikke-pivotsøyler + antall pivotsøyler = n

Derfor dim Nul A + dim Col A = n

(Se rangteoremet, teorem 14, seksjon 4.5 ; Lay)

Definisjon: En lineær transformasjon T fra et vektorrom V til et vektorrom W er en regel som for hver $\vec{x} \in V$ tilordner en unik $T(\vec{x}) \in W$ slik at

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

(ii) $T(c\vec{u}) = c\,T(\vec{u})$

kjernen til T: $\{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0}\}$ underrom av V

range til T: $\{T(\vec{x}) : \vec{x} \in V\}$ underrom av W

Hvis $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, så er kjernen til T = Nul A

range til T = Col A

Oppgave 44 La $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ ved $T(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \vec{p}(0) \\ \vec{p}(0) \end{bmatrix}$

Finn kjerne og range til T.

Løsning: Vi har $\vec{p}(t) = a + bt + ct^2$. Da er $\vec{p}(0) = a$

slik at $T(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Range T = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Videre: $T(\vec{p}) = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \vec{0} \iff a = 0$

Dermed kjerne T = alle andregradspolynomer uten konstantledd ■

Eksempel 9: V : reellvaluerte f def. på $[a,b]$, deriverbare med kont. derivert

W : reellvaluerte f, kontinuerlige på $[a,b]$ $(C[a,b])$

Definer $D: V \to W$ ved $D(f) = f'$

Hva er kjerne og range for D?

Løsning: Siden $D(f+g) = D(f) + D(g)$, $D(cf) = cDf$, så er D en linear transformasjon.

kjernen til D: Når er $Df = 0$? bare konstanter er deriverbare med derivert 0 (hint: middelverdisetningen)

$\Rightarrow$ kjerne D = konstante funksjoner.

Range D: hele $W = C[a,b]$, siden alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert (se seksjon 6.1 i TL)