Forelesning 26/8

Resten av sek. 4.2
Sek. 4.3

Ex 11: Husk fra ex 3 (mandag) er $\mathbb{S}$ uendelige følger på formen $(\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$

Definer $M_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ved $M_2(\{p_k\}) = \left\{ \frac{p_k + p_{k-1}}{2} \right\}$

Vis at M_2 er lineær, og finn kjernen

Løsning:

$$M_2(\{p_k\} + \{q_k\}) = M_2(\{p_k + q_k\})$$
$$= \left\{ \frac{(p_k + q_k) + (p_{k-1} + q_{k-1})}{2} \right\}$$
$$= \left\{ \frac{p_k + p_{k-1}}{2} \right\} + \left\{ \frac{q_k + q_{k-1}}{2} \right\}$$
$$= M_2(\{p_k\}) + M_2(\{q_k\})$$

$$M_2(c\{p_k\}) = M_2(\{cp_k\}) = \left\{ \frac{cp_k + cp_{k-1}}{2} \right\} = c\left\{ \frac{p_k + p_{k-1}}{2} \right\}$$
$$= c\, M_2(\{p_k\})$$

$\Rightarrow M_2$ lineær t.

Kjernen til M_2: $\{p_k\} \in$ kjerne M_k hvis $\frac{p_k + p_{k-1}}{2} = 0$ for alle k.

Men da må $p_k = -p_{k-1}$ alle k

$\Rightarrow p_k$ må alternere en verdi i fortegn

$\Rightarrow p_k = a(-1)^k$

Seksjon 4.3

Definisjon $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ sies å være lineært uavhengige hvis likningen $c_1\vec{v}_1 + \dots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$ (1) bare har den trivielle løsningen $c_1 = \dots = c_p = 0$.
Ellers sier vi at $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ er lineært avhengige.
En lineær avhengighetsrelasjon er en ikke-triviell løsning av (1)

Lineær avhengighet for $\begin{cases} p=2 & \vec{v}_1 \text{ multiplum av } \vec{v}_2 \\ p>2 & \text{en } \vec{v}_i \text{ må være en lineær kombinasjon av de andre.} \end{cases}$

Husker fra FVLA: 1) Et sett med vektorer er lin. uavhengig hvis den radreduserte matrisen har kun pivotsøyler.
2) Lin. avhengighetsrelasjoner bevares ved radreduksjon.

eksempel: La $\{\underbrace{1-t^2}_{\vec{p}_1}, \underbrace{t-t^2}_{\vec{p}_2}, \underbrace{2-t-t^2}_{\vec{p}_3}\} \subset \mathbb{P}_2$

Vi kan sjekke at $\vec{p}_3 = 2\vec{p}_1 - \vec{p}_2$, slik at $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ er lineært avhengige.

La oss istedet se på

eneste endring

$$\{1-t^2,\ t-t^2,\ \underbrace{2-t+t^2}_{\text{"nye" } \vec{p}_3}\} \subset \mathbb{P}_2$$

Påstår at disse er lineært uavhengige. Vises slik:

Anta $c_1(1-t^2) + c_2(t-t^2) + c_3(2-t+t^2) = \vec{0}$

Da må vi ha $=0$ for alle t.

Setter inn
$$\begin{cases} t=-1: & -2c_2 + 4c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ t=0: & c_1 + 2c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ t=1: & 2c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \end{cases}$$

Altså, ved å gjette på tre punkter klarte vi å vise lineær uavhengighet. ∎

Definisjon La H være et underrom av V. Et sett av vektorer B i V kalles en basis for H hvis
(i) B er lineært uavhengig
(ii) $H = \text{Span}\, B$

Hvorfor både H og V? B kan generelt ligge utenfor H, men $H = \text{Span}\, B$ tvinger vektorene i B til å være i H.

Vi vet fra før: n lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$ utspenner $\mathbb{R}^n$ (siden pivot i hver rad), så disse n utgjør en basis.

Eksempel: Hvordan se om $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$?

Løsning: Matrisen med disse som søyler: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Bring på trappeform (er allerede det)

$\left.\begin{array}{l}\text{pivot i hver rad} \Rightarrow \text{utspenner } \mathbb{R}^n\\ \text{pivot i hver søyle} \Rightarrow \text{lin. uavhengige søyler}\end{array}\right\}$ basis for $\mathbb{R}^3$.

Eksempel: Er $\{1-t^2, t-t^2, 2-t+t^2\}$ en baris for $\mathbb{P}_2$?

Løsning: Vi viste allerede at de er lin. uavhengige.
Må se på

$$c_1(1-t^2)+c_2(t-t^2)+c_3(2-t+t^2) = \underbrace{a+bt+ct^2}_{\text{generelt polynom i } \mathbb{P}_2}$$

$$\underline{c_1+2c_3} + \underline{(c_2-c_3)}t + \underline{(-c_1-c_2+c_3)}t^2 = \underline{a} + \underline{b}t + \underline{c}t^2$$

$$\begin{aligned} c_1 \quad\quad & +2c_3 = a \\ c_2 & - c_3 = b \\ -c_1 \quad -c_2 & + c_3 = c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{invertebar}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

invertebar, så har løsning for c_1, c_2, c_3, slik at $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ utspenner $\mathbb{P}_2$.

Vi har lært: For å finne en basis for søylerommet: radreduser, og plukk ut pivotsøylene. Kan fjerne ikke-pivotsøyler.

Teorem 5 (mer generelt)

Anta $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$, og $H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$

a) Hvis en vektor $\vec{v}_k$ i S kan uttrykkes med andre $\vec{v}_i$, så vil settet vi får ved å fjerne $\vec{v}_k$ fra S fremdeles utspenne H.

b) Hvis $H \neq \{\vec{0}\}$ så vil et subsett for S være en basis for H.

<u>Bevis:</u> Anta $\vec{v}_p = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_{p-1}\vec{v}_{p-1}$

Da er

$$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_p\vec{v}_p = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_{p-1}\vec{v}_{p-1} + c_p(a_1\vec{v}_1 + \dots + a_{p-1}\vec{v}_{p-1})$$
$$= (c_1 + c_p a_1)\vec{v}_1 + \dots + (c_{p-1} + c_p a_{p-1})\vec{v}_{p-1}$$
$$\in \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}\}$$

Slik at $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}\}$

Videre er $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \supseteq \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}\}$

Dette viser at vi kan fjerne $\vec{v}_p$, og dette viser a) ■

Oppgave 12 Finn en basis for $\underbrace{\text{vektorene i } \mathbb{R}^2 \text{ på linja } y = 5x}_{H}$

Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in H \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 5x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ ∎

Oppgave 36 Finn en basis for rommet utspent av $\{\sin t, \sin 2t, \sin t \cos t\}$

Løsning: Siden $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, så kan $\sin 2t$ skrives som en lineær kombinasjon av de to andre (en er nok).

Teorem 5: Fjern $\sin 2t$ fra mengden

$\Rightarrow \text{Span}\{\sin t, \sin 2t, \sin t \cos t\} = \text{Span}\{\sin t, \sin t \cos t\}$.

Vi sjekker lin. uavhengighet av disse to:

Anta $c_1 \sin t + c_2 \sin t \cos t = 0$ (skal gjelde for alle t)

Setter inn $\begin{cases} t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$

Derfor er $\{\sin t, \sin t \cos t\}$ lin. uavhengige, og også en basis ∎

$\boxed{\text{Teorem 6} \quad \text{Pivotsøylene til en matrise } A \text{ gir en basis for Col } A.}$

Bevis: Husk at $\underbrace{\text{avhengighetsrelasjoner}}_{A\vec{x}=\vec{0}}$ mellom søylene bevares ved radoperasjoner

Radoperasjon = ganger med en invertarbar matrise (C),

og får $\underset{\text{på trappeform}}{B} = \underset{\text{invertarbar}}{C}A$

Legg merke til $\underbrace{A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow CA\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow B\vec{x}=\vec{0}}_{\text{Lineær avh. relasjoner bevares.}}$

pivotsøylene i B er lin. uavhengige

$\Updownarrow$

pivotsøylene i A er lin. uavhengige.

Det følger at Col A utspennes av pivotsøylene i A, siden Col B utspennes av pivotsøylene i B ∎