Forelesning 30/8

Resten av seksjon 4.3

Seksjon 4.4

Oppgave 4.1.44 (gjort før)

Vi fant

$$\begin{array}{cccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4=\vec{y} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 & -4 \\ 8 & 7 & -6 & -8 \\ -5 & -8 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \overset{\text{rref}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \vec{b}_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ser at tre første søyler er pivotsøyler, slik at

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$$ er en basis for Col A.

Videre er $\vec{b}_4 = -0.2\,\vec{b}_1 - 0.4\,\vec{b}_2 + 0.6\,\vec{b}_3$

slik at $\vec{a}_4 = -0.2\,\vec{a}_1 - 0.4\,\vec{a}_2 + 0.6\,\vec{a}_3$

slik at $\vec{y} = \vec{a}_4 = A \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

Teorem 7: Hvis to matriser A og B er radekvivalente, så er radrommene deres like ($\text{Row } A = \text{Row } B$)
Hvis B er på trappeform, så er pivotradene (de som er $\neq 0$) basis for radrommet til A (og B)

Bevis: Radoperasjon: erstatter en rad med en lineær kombinasjon av andre rader

Derfor: $\text{Row } B \subseteq \text{Row } A$
Siden radoperasjoner kan reverseres så vil også
$\text{Row } A \subseteq \text{Row } B$
Derfor er $\text{Row } A = \text{Row } B$
Det er videre klart at pivotradene i B er basis for $\text{Row } B$. ∎

Oppgave 4.1.44 igjen Vi fant

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 & -4 \\ 8 & 7 & -6 & -8 \\ -5 & -8 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \overset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Disse er en basis for $\text{Row } A$

Seksjon 4.4 (Koordinatsystemer)

Teorem 8 La $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for vektorrommet V.
For hver $\vec{x} \in V$ finnes da unike skalarer $c_1, \dots, c_n$ slik at

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n$$

$c_1, \dots, c_n$ kalles også for koordinatene til $\vec{x}$ relativt til B.
Vi skriver også $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ for disse.

Bevis: Anta $\vec{x}$ kan skrives på to forskjellige måter:

$$\vec{x} = \begin{cases} c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n \\ d_1 \vec{b}_1 + \dots + d_n \vec{b}_n \end{cases} \text{trekk fra hverandre} : (c_1 - d_1)\vec{b}_1 + \dots + (c_n - d_n)\vec{b}_n = \vec{0}$$

Siden $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ er lineært uavhengige må da $c_1 - d_1 = \dots = c_n - d_n = 0$
slik at $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$.

Det følger at koordinatene er unike.
Siden B utspenner V, så vil koordinater eksistere for $\vec{x} \in V$ ■

Hvordan finner vi koordinatene i $\mathbb{R}^n$?
Svar: Løs $B\vec{c} = \vec{x}$, der $B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$ for å finne koordinatene til $\vec{x}$.
Radreduser $[B \ \vec{x}]$

Eksempel La oss se på planet $x_1+x_2+x_3=0$, som er et underrom av $\mathbb{R}^3$.
Vis at $B=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ er en basis for dette planet.
Vis også at $\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ ligger i planet og finn $[\vec{x}]_B$.

Løsning: Planet er nullrommet til $A=[1\ \ 1\ \ 1]$, som er på red. trappeform.
I Nul A er da x_2, x_3 frie variable, og $x_1=-x_2-x_3$.
$\vec{x}$ i nullrommet: $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\x_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.
Ser at $\vec{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ gir oss da en basis for nullrommet.
Siden $0+1-1=0$, så ligger $\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ i planet.
$[\vec{x}]_B$: Radreduser $[\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{x}]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\sim\cdots\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $c_1=1$, $c_2=-1$
Derfor er $\underline{\underline{\vec{x}=\vec{b}_1-\vec{b}_2}}$, og $\underline{\underline{[\vec{x}]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}}$

Definisjon: Anta $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

$P_B = [b_1 \cdots b_n]$ kalles koordinatskiftematrisen fra B til $\underbrace{\text{standardbasisen}}_{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots}$ $\mathcal{E}$ for $\mathbb{R}^n$.

Hvorfor fra B til $\mathcal{E}$

Anta $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n$

$= x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

Altså: $\begin{cases} x_1, \dots, x_n \text{ er koordinatene til } \vec{x} \text{ i } \mathcal{E} \\ c_1, \dots, c_n \text{ er koordinatene til } \vec{x} \text{ i } B \end{cases}$

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n$ kan skrives $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = P_B [\vec{x}]_B$$

slik at P_B transformerer koordinater i B til koordinater i $\mathcal{E}$.

P_B er invertebar siden B er en basis. Derfor er og

$$[\vec{x}]_B = P_B^{-1} [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$$

slik at P_B^{-1} kan tolkes som et koordinatskifte fra $\mathcal{E}$ til B. (dvs. motsatt vei).

Definisjon
Hvis B er en basis for V så kalles transformasjonen

$\vec{x} \to [\vec{x}]_B$ (fra V til $\mathbb{R}^n$) for koordinatsavbildningen

Oppgave 28 Vis at koordinatsavbildningen er på $\mathbb{R}^n$ (treffer hele $\mathbb{R}^n$)

Løsning: La $\vec{c}$ være en generell vektor i $\mathbb{R}^n$.
Da er $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n \in V$, og $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \vec{c}$,
slik at $\vec{x} \to [\vec{x}]_B$ er på ■

Teorem 9 La $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være en basis for V
Da er koordinatsavbildningen en lineær transformasjon
som er $1 \to 1$, og på $\mathbb{R}^n$ (dette kalles også en isomorfi)

Bevis: oppgave 27 (til neste uke) viser $\vec{x} \to [\vec{x}]_B$ er $1 \to 1$.
oppgave 28 viser at $\vec{x} \to [\vec{x}]_B$ er på.

Lineær? anta $\begin{cases} \vec{u} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n \\ \vec{w} = d_1\vec{b}_1 + \dots + d_n\vec{b}_n \end{cases}$ $[\vec{u}]_B = \vec{c}$, $[\vec{w}]_B = \vec{d}$

$\Rightarrow$ $\vec{u} + \vec{w} = (c_1+d_1)\vec{b}_1 + \dots + (c_n+d_n)\vec{b}_n$

$[\vec{u}+\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_n+d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \vec{c} + \vec{d}$

Ser at $[\vec{u}]_B + [\vec{w}]_B = \vec{c} + \vec{d} = [\vec{u}+\vec{w}]_B$

Har også: $[c\vec{u}]_B = [cc_1\vec{b}_1 + \dots + cc_n\vec{b}_n]_B = \begin{bmatrix} cc_1 \\ \vdots \\ cc_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c[\vec{u}]_B$

$\Rightarrow \vec{x} \to [\vec{x}]_B$ er lineær ■

Oppgave 30 Vis at $\vec{w}$ = lineær komb. av $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ i V

$\Updownarrow$

$[\vec{w}]_B$ = lineær komb. av $[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B$ i $\mathbb{R}^n$

Løsning: Anta $\vec{w} = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p$

Da er $[\vec{w}]_B = [c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p]_B$

$\overset{\text{lineær}}{=} c_1[\vec{u}_1]_B + \dots + c_p[\vec{u}_p]_B$

som viser at $[\vec{w}]_B$ er en lineærkombinasjon av $[\vec{u}_1]_B, \dots [\vec{u}_p]_B$, til og med med de samme koeffisientene. ∎

Korollar til Teorem 9 (notat 1 fra ifjor) (kan forflytte oss til $\mathbb{R}^n$).

Anta $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ er basis for V, $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subseteq V$

Sett $S_B = \{[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B\}$

$[S_B] = [\, [\vec{u}_1]_B \cdots [\vec{u}_p]_B \,]$

Da gjelder
1) S utspenner $V \Leftrightarrow S_B$ utspenner $\mathbb{R}^n$
2) S lin. uavh. i $V \Leftrightarrow S_B$ lin. uavh. i $\mathbb{R}^n$
3) S basis for $V \Leftrightarrow S_B$ basis for $\mathbb{R}^n$

Litt om beviset: 3) følger fra 1) og 2).
2) følger direkte fra oppgave 30 (sett $\vec{w} = \vec{0}$)

Bevis for 1)

$\Rightarrow$ Anta at S utspenner V, og la $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Siden koordinatavbildningen er på, så finnes en $\vec{u} \in V$ s.o. $[\vec{u}]_B = \vec{x}$.

Men da er $\vec{x} = [\vec{u}]_B = [\underbrace{c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p}_{\substack{\vec{u} \text{ kan skrives slik} \\ \text{siden } S \text{ utspenner } V}}]_B \overset{\text{lin.}}{=} c_1[\vec{u}_1]_B + \dots + c_p[\vec{u}_p]_B$

Dette viser at $\vec{x} \in \text{Span}\{[\vec{u}_1]_B, \dots [\vec{u}_p]_B\} = \text{Span}\, S_B$,

slik at S_B utspenner $\mathbb{R}^n$

(Husk at $\text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ består av alle lineære kombinasjoner av $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$)

$\Leftarrow$ Anta at S_B utspenner $\mathbb{R}^n$, og la $\vec{u} \in V$

Det finnes da $c_1, \dots, c_p$ s.o. $[\vec{u}]_B = c_1[\vec{u}_1]_B + \dots + c_p[\vec{u}_p]_B$

$\overset{\text{lin.}}{=} [c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p]_B$

Siden koordinatsavbildningen er $1 \to 1$ følger det at

$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p$,

slik at S utspenner V ∎

Eksempel fra forrige uke:

La $B = \{1, t, t^2\}$ (standardbasisen for $\mathbb{P}_2$)

$S = \{1-t^2, t-t^2, 2-t-t^2\}$ (viste at ikke var basis)

Da er $S_B = \{ [1-t^2]_B, [t-t^2]_B, [2-t-t^2]_B \}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$[S_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Siden søyle 3 ikke pivotsøyle: Ikke lin. uavhengige

siden rad 3 ikke har pivot: Utspenner ikke $\mathbb{R}^3$.

Matrisen ikke inverterbar $\Leftrightarrow$ S_B ikke basis for $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

S ikke basis for $\mathbb{P}_2$.

Hvis vi i stedet setter $S = \{1-t^2, t-t^2, 2-t+t^2\}$ eneste forskjell.

Da får vi: $[S_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{rref}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dermed er $[S_B]$ inverterbar, slik at S_B basis for $\mathbb{R}^n$, og S basis for $\mathbb{P}_2$. ■