Forelesning 1/9

Seksjon 4.5

Teorem 10 Anta $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ er en basis for V.
Ethvert sett som inneholder mer enn n vektorer fra V må være lineært avhengig.

Bevis: La $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ med $p > n$.

Fra korollaret: S lin. uavhengig $\Leftrightarrow$ $S_B = \{[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B\}$ lin. uavhengig.

Men $p > n$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ er alltid lin. avhengig (kan ikke ha pivot i hver søyle, siden for mange søyler)

Det følger at S er lineært avhengig. ∎

Teorem 11 Hvis V har en basis med n vektorer, så vil enhver annen basis for V også ha n vektorer.

Bevis: Anta $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ er en basis for V

Fra korollaret: S basis $\Leftrightarrow$ $S_B = \{[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B\}$ basis for $\mathbb{R}^n$

men da må $p = n$ (enhver basis for $\mathbb{R}^n$ har n elementer) ∎

Definisjon: Hvis V utspennes av et endelig sett S så sier vi at V er endeligdimensjonal.

Antallet vektorer i en basis for V kalles dimensjonen til V, skrevet $\dim V$.

Hvis V ikke utspennes av et endelig sett sier vi at V er uendeligdimensjonal.

		dimensjon
$\mathbb{P}_n$	:	$n+1$
$\mathbb{R}^n$	:	n
$\mathrm{Nul}\,A$	:	antall ikke-pivotsøyler i A
$\mathrm{Col}\,A$	:	antall pivotsøyler i A } like
$\mathrm{Row}\,A$	:	antall pivotrader i A } like

Definisjon: Dimensjonen til $\mathrm{Row}\,A$ eller $\mathrm{Col}\,A$ kalles rangen til A ($\mathrm{rank}\,A$).
Dimensjonen til $\mathrm{Nul}\,A$ kalles nulliteten til A (nullitet A).

Teorem 12 La H være et underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom V.
Enhver lin. uavhengig mengde fra H kan utvides til en basis for H.
H er også endeligdimensjonal, og $\dim H \leq \dim V$

Bevis: La $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ være basis for V, og
$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ en lin. uavhengig mengde fra H.

Vi vet da at $\{[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B\}$ er lin uavhengig mengde i $\mathbb{R}^n$.
Setning 4.6.15 i FVLA: Vi kan finne vektorer $\vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_n$
s.a $[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B, \vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

Siden koordinatsavbildningen er på: Det finnes vektorer
$\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n$ s.a. $\vec{x}_{p+1} = [\vec{u}_{p+1}]_B, \dots, \vec{x}_n = [\vec{u}_n]_B$

Dermed er $[\vec{u}_1]_B, \dots [\vec{u}_n]_B$ en basis for $\mathbb{R}^n$

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \Updownarrow$ en basis for V. ■

Teorem 13 (Basisteoremet)

Anta V har dimensjon $p \geq 1$

Enhver lin. uavhengig mengde med p elementer er automatisk en basis.

Enhver mengde med p elementer som utspenner V er automatisk en basis.

Bevis: Se på $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$, $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p\}$ basis for V.

S lin. uavhengig $\Leftrightarrow$ $[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B$ lin. uavhengig i $\mathbb{R}^p$ $\overset{\text{FVLA}}{\Leftrightarrow}$ disse er en basis

pivot i hver søyle $\Rightarrow$ pivot i hver rad

S utspenner V $\Leftrightarrow$ $[\vec{u}_1]_B, \dots, [\vec{u}_p]_B$ utspenner $\mathbb{R}^p$ $\overset{\text{FVLA}}{\Leftrightarrow}$ disse er en basis

pivot i hver rad $\Rightarrow$ pivot i hver søyle. ■

Teorem 14 (rangteoremet)

La A være $m \times n$. Da er $\operatorname{rank} A + \text{nullitet } A = n$

Bevis:

rank A = antall pivotsøyler i A

nullitet A = antall ikke-pivotsøyler i A (= antall frie variable)

$\| \quad$ antall søyler $= n$ ■

Oppgave 10 Hva er dimensjonen til underrommet utspent av

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\6\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\7\end{bmatrix} ?$$

Hva er nulliteten til matrisen med disse som søyler?

Løsning:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & -8 & -3\\ -2 & 4 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & -8 & -3\\ 0 & -2 & -10 & -6\\ 0 & 1 & 5 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & -8 & -3\\ 0 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

Ser: Antall $\overbrace{\boxed{\text{pivotsøyler}}}^{1,2,4}$ er 3 $\Rightarrow$ rank $A = 3$

nullitet $A = 4 - \text{rank } A = 4 - 3 = 1$ (x_3 er eneste frie variabel for nullrommet.

Oppgave 38 Anta A er 7×6, og at nullitet $A = 5$.
Hva er dimensjonen til Col A og Row A?

Løsning: Vi vet at dim Row A = dim Col A = rank A, og

rank A + nullity $A = n = 6$

rank $A + 5 = 6$

rank $A = 1$ = dim Row A = dim Col A.

Teorem (Inverterbare matriser)

La A være $n \times n$. Følgende er ekvivalent:

1. A er inverterbar
2. Søylene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$
3. $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$
4. $\text{rank } A = n$
5. $\text{nullitet } A = 0$
6. $\text{Nul } A = \{0\}$

Bevis: $1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3. \Leftrightarrow 4.$

Videre er A inverterbar hvis og bare hvis $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

$\Updownarrow$

$\text{Nul } A = \{0\}$.

$\Updownarrow$

$\text{nullitet } A = 0$. ∎