Forelesning 2/9

Seksjon 4.6 Basisskifte (+ oppgave 2, 8, 16, 22)

Vi definerte i seksjon 4.4 koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ til standardbasisen $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$P_{\mathcal{B}} = [\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]$$

Hva hvis: 1) Vi ikke er i $\mathbb{R}^n$, men i et generelt vektorrom V?

2) Vi har to generelle basiser i stedet for $\mathcal{B}$ og $\mathcal{E}$?

Teorem 15 La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ begge være basiser for et vektorrom V. Da finnes det en unik $n \times n$-matrise, $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ slik at $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

(transformerer $\mathcal{B}$-koordinater til $\mathcal{C}$-koordinater)

Videre er $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [\,[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}}\,]$

(søylene i $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ fås ved å finne koordinatene til de "gamle" basisvektorene relativt til den "nye" basisen ($\mathcal{C}$).

Matrisen $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ kalles koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

Bevis: Skriv $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$, s.a. $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \vec{c}$

Da er $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = [c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \overset{\text{lineær}}{=} c_1[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[\vec{b}_n]_{\mathcal{C}}$

$$= \left[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

($[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ er det vi skulle vise)

Unikhet: Hvis $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$, sett $\vec{x} = \vec{b}_i$:

$$\underbrace{[\vec{b}_i]_{\mathcal{C}}}_{\text{i'te søyle i } P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}} = P[\vec{b}_i]_{\mathcal{B}} = P\vec{e}_i = \text{i'te søyle i } P$$

Dette viser at P og $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ er like søyle for søyle,

Dette viser at koordinatskiftematrisen er unik ■

Oppgave 2 La $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ være basiser for V

Anta $\vec{b}_1 = -\vec{c}_1 + 4\vec{c}_2$, $\vec{b}_2 = 5\vec{c}_1 - 3\vec{c}_2$

a) Finn $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Løsning: Vi har $[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \left[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \; [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} \right] = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}}$$

b) Finn $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$ når $\vec{x} = 5\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$

Løsning: Vi har $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Da blir

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+15 \\ 20-9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}}}$$

Siden $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ er basis for V, så er $[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}}$ basis for $\mathbb{R}^n$.

Da vet vi at $P_{\mathcal{C}\leftarrow B} = \left[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\vec{b}_n]_{\mathcal{C}} \right]$ er invertibar, og vi får

$$[\vec{x}]_B = (P_{\mathcal{C}\leftarrow B})^{-1} [\vec{x}]_{\mathcal{C}}$$

Teorem 15 sier da at

$$P_{B\leftarrow \mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C}\leftarrow B})^{-1} = \left[[\vec{c}_1]_B \cdots [\vec{c}_n]_B \right]$$

Merk: Hvis $\mathcal{C} = \mathcal{E}$, og vi er i $\mathbb{R}^n$, så blir $[\vec{b}_i]_{\mathcal{C}} = [\vec{b}_i]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_i$, og dette faller da sammen med definisjonen av P_B i seksjon 4.4.

Oppgave 2 igjen: Koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{C}$ til B?

Løsning:

$$\left[P_{\mathcal{C}\leftarrow B} \quad I \right] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \cdots \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{matrix}}_{P_{B\leftarrow \mathcal{C}}} \right]$$

Vi ser at $P_{B\leftarrow \mathcal{C}} = \underline{\underline{\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}}$

Oppgave 22 La $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$, $D = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ være basiser for samme rom.

Finn en sammenheng mellom $P_{C\leftarrow B}$, $P_{D\leftarrow C}$, og $P_{D\leftarrow B}$

Løsning: Siden $[\vec{x}]_C = P_{C\leftarrow B}[\vec{x}]_B$, $[\vec{x}]_D = P_{D\leftarrow C}[\vec{x}]_C$ får vi

$$[\vec{x}]_D = P_{D\leftarrow C}\, P_{C\leftarrow B}[\vec{x}]_B$$

Siden også $[\vec{x}]_D = P_{D\leftarrow B}[\vec{x}]_B$

Det følger fra unikhet av basisskiftematrisen at $P_{D\leftarrow B} = P_{D\leftarrow C}\, P_{C\leftarrow B}$

Oppgave 8 La $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hva blir $P_{C \leftarrow B}$ og $P_{B \leftarrow C}$?

Løsning: $P_{C \leftarrow B}$: Vi trenger

a) $[\vec{b}_1]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 = \vec{b}_1 \Leftrightarrow [\vec{c}_1 \ \ \vec{c}_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{b}_1$

b) $[\vec{b}_2]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$: $y_1\vec{c}_1 + y_2\vec{c}_2 = \vec{b}_2 \Leftrightarrow [\vec{c}_1 \ \ \vec{c}_2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \vec{b}_2$

Dette gir systemer med to forskjellige høyresider.
Disse kan løses simultant (se ; 4.4.2 ; FVLA):

$$[\vec{c}_1 \ \ \vec{c}_2 \ \ \vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dette gir $[\vec{b}_1]_C = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$, $[\vec{b}_2]_C = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}$, slik at $P_{C \leftarrow B} = \big[[\vec{b}_1]_C \ \ [\vec{b}_2]_C \big] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}}}$

$P_{B \leftarrow C}$: Kan enten invertere $P_{C \leftarrow B}$, eller på samme måte regne ut

$$[\vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2 \ \ \vec{c}_1 \ \ \vec{c}_2] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

slik at $\left.\begin{array}{l} [\vec{c}_1]_B = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix} \\ [\vec{c}_2]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$ $P_{B \leftarrow C} = \big[[\vec{c}_1]_B \ \ [\vec{c}_2]_B \big] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}}}$

Oppgave 16 Finn $P_{\mathcal{E}\leftarrow B}$, der $B = \{\underbrace{1-3t^2}_{\vec{b}_1}, \underbrace{2+t-5t^2}_{\vec{b}_2}, \underbrace{1+2t}_{\vec{b}_3}\}$,

og $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ er standardbasisen for $\mathbb{P}_2$

Finn også $[t^2]_B$ (skriver t^2 som lin. komb. av $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$)

Løsning: Vi har at $P_{\mathcal{E}\leftarrow B} = \left[\, [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} \;\; [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} \;\; [\vec{b}_3]_{\mathcal{E}} \,\right]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[t^2]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow B}\,[t^2]_B$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} [t^2]_B$$

$[t^2]_B$ kan derfor finnes ved å radredusere utvidet matrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\underline{[t^2]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

(kunne også invertert $P_{\mathcal{E}\leftarrow B}$)

Sjekk: $3(1-3t^2) \quad -2(2+t-5t^2) + 1\cdot(1+2t)$

$= 3 - 9t^2 \quad -4 - 2t + 10t^2 + 1 + 2t$

$= t^2 \Rightarrow$ OK!