Seksjon 5.7 forts. (1. time. Oblig 1 i 2. time)

Vi så på systemer av typen

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}} \qquad \boxed{\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}$$

der $x_i(t)$ er ukjente funksjoner i t.

Vi så at: Hvis A er diagonaliserbar (s.a. $A = PDP^{-1}$, $\underbrace{D \text{ diagonal}}_{\text{egenverdier på diag.}}$) så har vi:

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) \Leftrightarrow \underbrace{\vec{y}\,'(t) = D\vec{y}(t)}_{\text{Løsning: } y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}} \quad \text{der } \vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$$

Det følger:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{\vec{v}_1}_{\text{første søyle i } P.} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

Det følger: $\{e^{\lambda_i t}\vec{v}_i\}_i$ er en basis for løsningsrommet.
(basis siden $\vec{v}_i$'ene er lineært uavhengige.

Merk: $\underbrace{\vec{v}_i}_{\text{søyle } i \text{ i } P}$ er egenvektor for A siden:

$$A\vec{v}_i = PDP^{-1}\vec{v}_i = PD\underbrace{P^{-1}P}\vec{e}_i = PD\vec{e}_i = P(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i P\vec{e}_i = \lambda \vec{v}_i$$

Komplekse egenverdier

Anta A har komplekse egenverdier.

Vi vet: $\vec{v}$ egenvektor for $\lambda \Leftrightarrow \bar{\vec{v}}$ egenvektor for $\bar{\lambda}$.

(vises ved å konjugere $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\bar{A}}\bar{\vec{v}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{v}}$)

Derfor: $x_1(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ og $\underset{}{\overset{\overline{x_1(t)}}{\overset{\shortparallel}{x_2(t)}}} = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{v}}$ er begge løsninger.

Disse er ikke reelle, men de utspenner samme løsningsrom som

$$Re(e^{\lambda t}\vec{v}) = \frac{1}{2}(x_1(t) + \bar{x}_1(t)) \quad \text{og} \quad Im(e^{\lambda t}\vec{v}) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - \bar{x}_1(t))$$

Disse er reelle!

Vi regner videre med $\lambda = a + bi$

$$e^{\lambda t}\vec{v} = e^{at+bit}(Re\,\vec{v} + i\,Im\,\vec{v}) = e^{at}\overbrace{(\cos bt + i\sin bt)}^{e^{ibt}}(Re\,\vec{v} + i\,Im\,\vec{v})$$

$$= \underbrace{e^{at}(\cos bt\,Re\,\vec{v} - \sin bt\,Im\,\vec{v})}_{\text{reell del}} + i\underbrace{e^{at}(\cos bt\,Im\,\vec{v} + \sin bt\,Re\,\vec{v})}_{\text{im. del}}$$

Derfor:

$$\boxed{\begin{aligned} Re(e^{\lambda t}\vec{v}) &= e^{at}(\cos bt\,Re\,\vec{v} - \sin bt\,Im\,\vec{v}) \\ Im(e^{\lambda t}\vec{v}) &= e^{at}(\cos bt\,Im\,\vec{v} + \sin bt\,Re\,\vec{v}) \end{aligned}}$$

Gir basis av reelle funksjoner for løsningsrommet.

Oppgave 5.7.14

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ Finn generell løsning på kompleks og reell form.

Løsning:

$\det(A - \lambda I) = (-3-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot(-9) = \lambda^2 + 9$

Dette er 0 når $\lambda = \pm 3i$

Egenvektor for $\lambda = 3i$:

$2 + (3+3i)(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i)$
$= 2 + (1+i)(-1+i)$
$= 2 - 1 + i^2 = 2-1-1 = 0$

$$A - 3iI = \begin{bmatrix} -3-3i & 2 \\ -9 & 3-3i \end{bmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i \\ -3-3i & 2 \end{bmatrix} \overset{II + (3+3i)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I en egenvektor har vi da $x_1 - \frac{1}{3}(1+i)x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}(1-i)x_2$

Setter vi $x_2 = 1$ får vi $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-i) \\ 1 \end{pmatrix}$

Kompleks form: $\left(\underbrace{3i}_{\text{egenverdi}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-i) \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{egenvektor}}\right)$ er et egenpar

$\Rightarrow \left(-3i, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+i) \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ er også et egenpar.

Generell løsning: $c_1 e^{3it}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3it}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+i) \\ 1 \end{pmatrix}$

Reell form: $\lambda = \underbrace{0}_{a} + \underbrace{3}_{b}i$ $\quad \operatorname{Re}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Im}\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-i) \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}) = e^{at}(\cos bt \operatorname{Re}\vec{v} - \sin bt \operatorname{Im}\vec{v}) = \cos 3t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}(e^{\lambda t}\vec{v}) = e^{at}(\sin bt \operatorname{Re}\vec{v} + \cos bt \operatorname{Im}\vec{v}) = \sin 3t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 3t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Dette gir $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\cos 3t + \sin 3t) \\ \cos 3t \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}(e^{\lambda t}\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-\cos 3t + \sin 3t) \\ \sin 3t \end{pmatrix}$

Oppgave 6 i oblig 1

Forklart der: Utregning av $\underbrace{A}_{n\times n}\underbrace{\vec{x}}_{n\times 1}$ krever $2n^2-n$ operasjoner.

Kjedelig hvis $n=$ antall dokumenter på internett.

For noen A-matriser kan vi være smarte:

1/ A har rang 1: Da har søylerommet til A dimensjon 1, slik at $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\vec{u}\}$ for en vektor $\vec{u}$.

$$A = [v_1\vec{u} \quad v_2\vec{u} \ \dots \ v_n\vec{u}] = \vec{u}\,[v_1 \ \dots \ v_n] = \vec{u}\,\vec{v}^T \quad \text{der } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Rekkefølge ved multiplikasjon spiller en stor rolle:

$$A\vec{x} = \underbrace{(\vec{u}\,\vec{v}^T)\,\vec{x}}_{\text{krever } 2n^2-n \text{ operasjoner}} = \vec{u}\,(\overbrace{\underbrace{\vec{v}^T\vec{x}}_{2n-1 \text{ operasjoner}}}^{y})$$

Til sammen $3n-1$ operasjoner

- Sparer mange regneoperasjoner
- Sparer mye lagring: $(\vec{u},\vec{v})$ trenger mindre lagringsplass enn $\vec{u}\,\vec{v}^T$

I obligen: $K = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1 \cdots 1)$, som er en matrise med rang 1.

2/ A har mange nuller: Siden $0\cdot$ hva som helst $=0$, så kan vi spare mange operasjoner ved å ha en liste over tall $\neq 0$ i matrisen: (a_{ij}, i, j). Da kan vi hoppe over multiplikasjoner med 0:

$$(A\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j:\, a_{ij}\neq 0} a_{ij}x_j$$

I obligen: Hvis A har k elementer $\neq 0$, så krever $A\vec{x}$ omtrent $2k$ operasjoner.

Hvorfor?

Anta at vi har r_i komponenter $\neq 0$ i rad i i A (slik at $r_1+\dots+r_n=k$)

Da krever $(A\vec{x})_i$ krever $2r_i-1$ operasjoner hvis $r_i>0$

$$A\vec{x} \text{ krever da } \sum_{\substack{i=1 \\ r_i>0}}^{n} (2r_i-1) \text{ operasjoner} \leq \sum_{i=1}^{n} 2r_i = 2(r_1+\dots+r_n) = 2k$$

Derfor: Selv om $(pA+(1-p)K)\vec{x} = pA\vec{x}+(1-p)K\vec{x}$ gir samme svar, så er dette mye mer tungvint å regne ut med venstresiden.