Forelesning 30/9

Seksjon 6.1 + deler av 6.7

Indreprodukter, lengde, og ortogonalitet

Oppgave 6.1.14

Avstanden mellom $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{z} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ er

$$\text{dist}(\vec{u}-\vec{z}) = \left\| \begin{bmatrix} 0+7 \\ -1+5 \\ 3-7 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{7^2+4^2+(-4)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Teorem 2 (Pythagoras teorem)

Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale så er $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Bevis: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad \blacksquare$$

Oppgave 6.1.22

Hvis $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, er da $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ortogonale?

Løsning:

Fra vår utregning:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \overset{\text{vist}}{=} \underbrace{\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \overset{\text{antagelse}}{=} \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2}$$

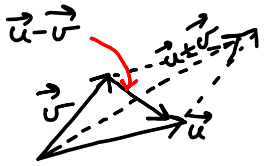
Da må $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Oppgave 6.1.32

Utled parallellogramloven: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$
$(\vec{u},\vec{v}\in \mathbb{R}^n)$

Løsning:

Tolkning:



Ser at $\vec{u}+\vec{v}$ og $\vec{u}-\vec{v}$ er kryssdiagonalene i parallogrammet
4 sider i parallogrammet med lengder
lengde $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$

Loven sier altså:

sum av kvadrater av sider
$=$
sum av kvadrater av kryssdiagonalene.

Bevis:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \|\vec{u}\|^2 + \underline{2\vec{u}\cdot\vec{v}} + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \underline{2\vec{u}\cdot\vec{v}} + \|\vec{v}\|^2\\ &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Pythagoras og parallellogramloven holder mer generelt i indreproduktrom.

Eksempler på indreprodukter:

Eksempel 2 i seksjon 6.7

La $t_0, t_1, \dots, t_n$ være forskjellige reelle tall, og la $V = \mathbb{P}_n$

Definer for $p, q \in \mathbb{P}_n$: $\langle p, q \rangle = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_n)q(t_n)$

Lett å sjekke at aksiom a. – c. er oppfylt.

Aksiom d.: $\langle p, p \rangle = p(t_0)^2 + \dots + p(t_n)^2 \geq 0$

Anta at $\langle p, p \rangle = 0$. Da må alle $p(t_i) = 0$ for $i = 0, \dots, n$.
Da er p et polynom av grad $\leq n$ med $n+1$ nuller.
Men da må $p = 0$.

Lite regneeksempel

Sett $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $n = 2$, og $p(t) = t$, $q(t) = t^2$ (begge i $\mathbb{P}_2$)

Vi får

$\langle p, q \rangle = (-1)(-1)^2 + 0 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = -1 + 1 = 0$

Så p og q er ortogonale!

Videre er:

$\langle p, p \rangle = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \|p\| = \sqrt{2}$

$\langle q, q \rangle = (-1)^4 + 0^4 + 1^4 = 2 \Rightarrow \|q\| = \sqrt{2}$

Eksempel 7 i seksjon 6.7

For $f, g \in C[a,b]$, definer $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

Igjen lett å sjekke aksiom a. – c..

Aksiom d.: $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(t)^2\,dt \geq 0$

Anta $f \neq 0$. Da finnes en t_0 slik at $f(t_0) \neq 0$.
Siden f er kontinuerlig så finnes det et intervall om t_0 der $f \neq 0$.
Men da må integralet bli > 0 vil bidra med noe > 0.
Dermed holder aksiom d.

Sett $a=0$, $b=2\pi$, $p(t)=\sin t$, $q(t)=\cos 2t$. Da er

$$\langle p,q\rangle = \int_a^b p(t)q(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin t \cos 2t\,dt = \int_0^{2\pi} \sin t\,(2\cos^2 t - 1)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{2\cos^2 t \sin t\,dt}_{\substack{\text{subst: } u=\cos t \\ du = -\sin t\,dt \\ 0}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\,dt}_{0}$$

$$= 0$$

så, $\sin t$ og $\cos 2t$ er ortogonale funksjoner.

Man kan vise at $\langle \underbrace{\cos nt}, \underbrace{\sin mt}\rangle = 0$ også.

Byggestener i Fourieranalyse.

Anta W er et underrom av V

Definisjon: Ortogonalkomplementet til W i V er
$$W^\perp = \{\vec{x} \in V : \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0 \text{ for alle } \vec{w} \in W\}$$

Teorem. Anta $W = \text{Span}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$. Da gjelder at $\vec{x} \in W^\perp \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = 0$, alle i

Bevis: $\Rightarrow$: er grei å se

$\Leftarrow$: Anta $\langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = 0$ alle i, og la $\vec{z} \in W$.

Siden $\vec{b}_i$ ene utspenner W kan vi skrive $\vec{z} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$

Da er
$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n \rangle = c_1\langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle + \cdots + c_n\langle \vec{x}, \vec{b}_n \rangle \\ &= 0 + \cdots + 0 = 0\end{aligned}$$
$\Rightarrow \vec{x} \in W^\perp$.

Oppgave 38 $W^\perp$ er et underrom av V.

Bevis: Anta at $\vec{x}_1 \in W^\perp$, $\vec{x}_2 \in W^\perp$. Da er, for $\vec{w} \in W$,

$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{w} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{w} \rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W^\perp$.

$\langle c\vec{x}_1, \vec{w} \rangle = c\langle \vec{x}_1, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow c\vec{x}_1 \in W^\perp$.

Det følger at $W^\perp$ er et underrom. ∎

Tilbake til skalarprodukter:

Teorem 3 La A være $m\times n$-matrise. Da gjelder

1) $(\underbrace{\text{Row } A}_{\text{radrom}})^{\perp} = \text{Nul}(A)$

2) $(\underbrace{\text{Col } A}_{\text{søylerom}})^{\perp} = \underbrace{\text{Nul}(A^T)}_{\text{nullrom}}$

Bevis: 1) $\subseteq$: Anta $\vec{x} \in (\text{Row } A)^{\perp}$. Da er

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m \cdot \vec{x} \end{bmatrix} \overset{\vec{x} \in (\text{Row } A)^{\perp}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} \in \text{Nul}(A).$$

rader i A

$\supseteq$: Anta $\vec{x} \in \text{Nul}(A)$

Siden $\vec{0} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m \cdot \vec{x} \end{bmatrix}$, så må alle $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$.

Siden $\vec{a}_i$'ene utspenner $\text{Row}(A)$ følger det at $\vec{x} \in (\text{Row } A)^{\perp}$.

2) Sett A^T i stedet for A i 1), og bruk at $\text{Row}(A^T) = \text{Col } A$.