Forelesning 4/10

Seksjon 6.2: Ortogonale mengder

En ortogonal mengde: $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ der $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ for $i \neq j$
$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$

Teorem 4 En ortogonal mengde S i et indreproduktrom er lineært uavhengig

Bevis: Anta $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ og at $c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_p\vec{u}_p = \vec{0}$

Regn ut $\langle c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_p\vec{u}_p, \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{0}, \vec{u}_j \rangle = 0$

$$c_1\langle \vec{u}_1, \vec{u}_j \rangle + \cdots + c_p\langle \vec{u}_p, \vec{u}_j \rangle = 0$$

alle andre $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ $\longrightarrow$

$$c_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = 0$$

$$c_j = 0$$

$\Rightarrow$ S er lineært uavhengig ∎

En ortogonal basis er en ortogonal mengde som er en basis (for V).

Teorem 5 Anta $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ er en ortogonal basis for V, og at $\vec{y} \in V$

Hvis $\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_p\vec{u}_p$

så er $c_j = \dfrac{\langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle}{\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle}$ $j = 1, \dots, p$

Bevis: Ta indreproduktet som over

$$\langle c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_p\vec{u}_p, \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle$$

$$c_1\langle \vec{u}_1, \vec{u}_j \rangle + \cdots + c_p\langle \vec{u}_p, \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle$$

$$c_j\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle$$

$$c_j = \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle}{\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle}$$

Oppgave 10 La $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, og $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Vis at $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og skriv $\vec{x}$ som en lineær kombinasjon av disse.

Løsning: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 8 - 8 + 0 = 0$ $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 4 - 4 = 0$ $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 2 + 2 - 4 = 0$

$\Rightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ er en ortogonal mengde. Disse er da lineært uavhengige.

Enhver lin. uavh. mengde på 3 elementer er en basis for $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ er ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

Vi regner ut:

$\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle = 12 + 16 = 28$ $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = 16 + 16 = 32$ $c_1 = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \dfrac{28}{32} = \dfrac{7}{8}$

$\langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle = 6 - 8 - 7 = -9$ $\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 4 + 4 + 1 = 9$ $c_2 = \dfrac{-9}{9} = -1$

$\langle \vec{x}, \vec{u}_3 \rangle = 3 - 4 + 28 = 27$ $\langle \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle = 1 + 1 + 16 = 18$ $c_3 = \dfrac{27}{18} = \dfrac{3}{2}$

Det følger at $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$

$$= \frac{7}{8}\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \frac{3}{2}\vec{u}_3$$

Sjekk

$$\begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 - 2 + \frac{3}{2} \\ -7/2 - 2 + 3/2 \\ 1 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{OK!}$$

Eksempel: La V være $\mathbb{P}_2$ med indreproduktet $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$

Vis at $\{1, t, t^2-\frac{1}{3}\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{P}_2$.

Løsning:

$$\langle 1,t\rangle = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

$$\langle 1, t^2-\tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1}(t^2-\tfrac{1}{3})\,dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{3}t\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3} = 0$$

$$\langle t, t^2-\tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1}(t^3-\tfrac{1}{3}t)\,dt = \left[\tfrac{1}{4}t^4-\tfrac{1}{6}t^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

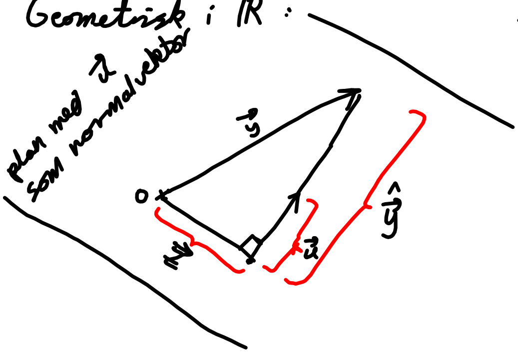
$\Rightarrow \{1, t, t^2-\frac{1}{3}\}$ er en ortogonal mengde.

Siden $\mathbb{P}_2$ har dimensjon 3, så er dette også en ortogonal basis.

Spørsmål: La $\vec{u}$ være en gitt vektor.
Hvordan kan vi dekomponere en annen vektor $\vec{y}$ som en sum av to vektorer:

- En som er parallell med $\vec{u}$
- En som er ortogonal på $\vec{u}$?

Geometrisk i $\mathbb{R}^3$:



$$\vec{y} = \underbrace{\hat{\vec{y}}}_{\alpha \vec{u}} + \underbrace{\vec{z}}_{\text{i planet med } \vec{u} \text{ som normalvektor}}$$

Ser at:

$\|\vec{z}\|$: avstanden mellom $\vec{y}$ og linja parallell med $\vec{u}$ gjennom origo

$\|\hat{\vec{y}}\|$: avstand til planet med $\vec{u}$ som normalvektor og som går gjennom origo

Spørsmål: Hva er α?

Svar: $\vec{y} - \alpha \vec{u}$ skal være ortogonal på $\vec{u}$, og da må

$$\langle \vec{y} - \alpha \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle \vec{y}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Derfor:
$$\begin{cases} \hat{\vec{y}} = \dfrac{\langle \vec{y}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} & \text{kalles ortogonal projeksjon av } \vec{y} \text{ på } \vec{u} \\ & \text{Skriver også } \mathrm{proj}_L \vec{y} \text{ for denne, der } L = \mathrm{Span}\{\vec{u}\}. \\ \vec{z} = \vec{y} - \hat{\vec{y}} & \text{kalles komponent av } \vec{y} \text{ ortogonal på } \vec{u} \end{cases}$$

Eksempel: I oppgave 10 er

- Den ortogonale projeksjonen av $\vec{x}$ på $\vec{u}_1$: $\hat{\vec{x}} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle}\vec{u}_1 = \frac{7}{8}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Vi kan skrive $\vec{x} = \underbrace{\vec{x} - \hat{\vec{x}}}_{\vec{z}} + \hat{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 7 \end{bmatrix}}_{\text{komponent ortogonal på } \vec{u}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{projeksjon på } \vec{u}_1.}$$

sjekk: disse må være ortogonale:

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{1}{2} \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \end{bmatrix} = -7/4 + \frac{7}{4} + 0 = 0 \Rightarrow \text{ok!}$$

- Avstand fra $\vec{x}$ til linjen med retning $\vec{u}_1$: $\|\vec{x} - \hat{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 49} = \sqrt{49{,}5}$
- Avstand til planet med $\vec{u}_1$ som normalvektor: $\|\hat{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

Tolkning av teorem 5, der

$$\vec{y} = \underbrace{\frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1}_{\text{en projeksjon på } \vec{u}_1} + \cdots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle}{\langle \vec{u}_p, \vec{u}_p \rangle} \vec{u}_p :$$

$\vec{y}$ kan skrives som en sum av p projeksjoner, på Span$\{u_1\}, \ldots,$ Span$\{\vec{u}_p\}$

En ortonormal mengde er en ortogonal mengde der alle $\|\vec{u}_i\| = 1$, $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1$

En ortonormal basis er en ortonormal mengde som også er en basis (for V)

Eksempel $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= 0 + 0 + 0 = 0 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 &= 0 + 0 + 0 = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ortogonal mengde} \qquad \left.\begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= 1 + 0 + 0 = 1 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 &= 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \text{lengde } 1.$$

Disse utgjør også en basis: 3 lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ er alltid en basis for $\mathbb{R}^3$.

Teorem 6 En $m \times n$ matrise U har ortonormale søyler hvis og bare hvis $U^TU = I$.

Bevis: Sett $U = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p]$

Da er
$$U^TU = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \end{bmatrix} [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p] = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_1^T\vec{u}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_p^T\vec{u}_p & \cdots & \vec{u}_p^T\vec{u}_p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_1\cdot u_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_p\cdot\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_p\cdot\vec{u}_p \end{bmatrix}$$

Dette er lik I hvis og bare hvis $\left.\begin{array}{ll} \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = 0 & i \neq j \\ \vec{u}_i\cdot\vec{u}_i = 1 & \text{alle } i \end{array}\right\}$ ortonormal mengde ∎

Fra eksemplet ser vi at $U^TU = I$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Siden U er kvadratisk så må $U^{-1} = U^T$

En slik matrise kalles en ortogonal matrise

Teorem 7 La U være $m \times n$ med ortonormale søyler, og la $\vec{x}$ være i $\mathbb{R}^n$. Da gjelder

a. $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

b. $(U\vec{x})\cdot(U\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$

c. $(U\vec{x})\cdot(U\vec{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.

Bevis: c følger fra b.

a. følger fra b. (sett $\vec{x} = \vec{y}$)

b.: $(U\vec{x})\cdot(U\vec{y}) = (U\vec{x})^T U\vec{y} = \vec{x}^T \underbrace{U^TU}_{I}\vec{y} = \vec{x}^T\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$ ∎

Oppgave 36: La U være $n \times n$ og ortogonal. Vis at radene i U er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Vi vet: ortonormale søyler $\Leftrightarrow$ $U^TU = I$.

Men da er og $UU^T = I$, som viser at U også har ortonormale rader. ∎