Forelesning 6/10

Seksjon 6.3: Ortogonale projeksjoner

Fra sist: Gitt $\vec{y} \in V$, $\vec{u} \in V$, vi kunne skrive

$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z}$, der
- $\hat{\vec{y}} \in \text{Span}\{\vec{u}\}$
- $\vec{z}$ ortogonal på $\text{Span}\{\vec{u}\}$

Fra tolkning i $\mathbb{R}^3$:
- $\hat{\vec{y}}$ er punktet i $\text{Span}\{\vec{u}\}$ nærmest $\vec{y}$
- $\|\vec{z}\|$ gir avstanden fra $\vec{y}$ til $\text{Span}\{\vec{u}\}$.

Idag: Vi skal generalisere dette.

Husk at $W^\perp = \{x \in V : \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0 \text{, alle } \vec{w} \in W\}$

Teorem 8 (Ortogonalt dekomposisjonsteorem)

La $W \subseteq V$ være et underrom av V.

Hver $\vec{y} \in V$ kan skrives unikt på formen

$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z}$, der $\hat{\vec{y}} \in W$, $\vec{z} \in W^\perp$

Hvis $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W så er

$$\hat{\vec{y}} = \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle}{\langle \vec{u}_p, \vec{u}_p \rangle} \vec{u}_p$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \hat{\vec{y}}$$

Som før: $\hat{\vec{y}}$ kalles den ortogonale projeksjonen av $\vec{y}$ på W

Skriver også $\hat{\vec{y}} = \text{proj}_W \vec{y}$.

<u>Bevis:</u> Det er klart at $\hat{\vec{y}} \in W$, siden $\{\vec{u}_i\}_i$ er en basis for W.
Videre er

$$\langle \vec{z}_1, \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{y} - \hat{\vec{y}}, \vec{u}_j \rangle$$
$$= \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle - \langle \hat{\vec{y}}, \vec{u}_j \rangle$$
$$= \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1 + \cdots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle}{\langle \vec{u}_p, \vec{u}_p \rangle} \vec{u}_p, \vec{u}_j \right\rangle$$
$$= \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle - \sum_{k=1}^{p} \left\langle \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_k \rangle}{\langle \vec{u}_k, \vec{u}_k \rangle} \vec{u}_k, \vec{u}_j \right\rangle$$

ortogonalitet
k=j eneste som bidrar

$$= \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle - \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle}{\cancel{\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle}} \cancel{\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle} = \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle - \langle \vec{y}, \vec{u}_j \rangle = 0$$

Det følger at $\vec{z} \in W^\perp$, og at en slik dekomposisjon eksisterer.

<u>Unikhet:</u> Anta vi også kan skrive $\vec{y} = \hat{\vec{y}}_1 + \vec{z}_1$, der $\hat{\vec{y}}_1 \in W, \vec{z}_1 \in W^\perp$.

Da er: $\hat{\vec{y}} + \vec{z} = \hat{\vec{y}}_1 + \vec{z}_1 \Rightarrow \hat{\vec{y}} - \hat{\vec{y}}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z}$

Her er $\hat{\vec{y}} - \hat{\vec{y}}_1 \in W$, $\vec{z}_1 - \vec{z} \in W^\perp$

Dette betyr at $\vec{v} = \hat{\vec{y}} - \hat{\vec{y}}_1 \in W$, og i $W^\perp$

Men da er $\langle \underbrace{\vec{v}}_{W}, \underbrace{\vec{v}}_{W^\perp} \rangle = 0$, men da må $\vec{v} = \vec{0}$.

Det følger at $\hat{\vec{y}} - \hat{\vec{y}}_1 = \vec{0}$, slik at $\hat{\vec{y}} = \hat{\vec{y}}_1$, slik at dekomposisjonen er unik. ∎

Merk: For å regne ut $\text{proj}_W \vec{y}$ trenger vi kun en ortogonal basis for W, ikke for hele V!

Merk: Hvis $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\}$ er en ortogonal basis for V, og $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$, da er

$$W^\perp = \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\} \quad (\text{se også på eksempel 1})$$

Bevis: Det er klart at $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\} \subseteq W^\perp$.
Vi viser at $W^\perp \subseteq \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q\}$:

Anta at $\vec{x} \in W^\perp$, og skriv

$$\vec{x} = \sum_i \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_i \rangle}{\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle} \vec{u}_i + \sum_j \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle}{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle} \vec{v}_j$$

Siden $\vec{x} \in W^\perp$ så er $\langle \vec{x}, \vec{u}_i \rangle = 0$ for alle i

$$\Rightarrow \vec{x} = \sum_j \frac{\langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle}{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle} \vec{v}_j \Rightarrow \vec{x} \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}.$$

Merk: Ortogonalt dekomposisjonsteorem kan også skrives

$$\vec{y} = \text{proj}_W \vec{y} + \text{proj}_{W^\perp} \vec{y}$$

Dette følger fra (med $\{\vec{u}_i\}_i$ basis for W, $\{\vec{v}_j\}$ basis for $W^\perp$)

$$\text{proj}_W \vec{y} = \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle}{\langle \vec{u}_p, \vec{u}_p \rangle} \vec{u}_p$$

$$\text{proj}_{W^\perp} \vec{y} = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} \vec{v}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_q \rangle}{\langle \vec{v}_q, \vec{v}_q \rangle} \vec{v}_q$$

Summeres til $\vec{y}$, teorem 5 i sek 6.2 siden $\{\{u_i\}_i, \{v_j\}_j\}$ er en ortogonal basis for hele V.

Teorem 9 (Beste approksimasjon)

La $W \subseteq V$ være et underrom, og la $\vec{y} \in V$, $\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y}$. Da er $\hat{y}$ nærmeste punkt i W til $\vec{y}$, det vil si

$$\|\vec{y}-\hat{y}\| < \|\vec{y}-\vec{v}\| \quad \text{der } \vec{v} \in W,\ \vec{v} \neq \hat{y}.$$

Derfor kalles $\hat{y}$ også for beste approksimasjon i W til $\vec{y}$.

Bevis: Anta $\vec{v} \in W$, $\vec{v} \neq \hat{y}$. Da er $\hat{y}-\vec{v} \in W$.

Siden $\vec{y}-\hat{y}$ er ortogonal på W, og siden

$$\vec{y}-\vec{v} = \underbrace{(\vec{y}-\hat{y})}_{W^\perp} + \underbrace{(\hat{y}-\vec{v})}_{W}$$

så er

$$\|\vec{y}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{y}-\hat{y}\|^2 + \|\hat{y}-\vec{v}\|^2 > \|\vec{y}-\hat{y}\|^2$$

(siden $\hat{y} \neq \vec{v}$)

Resultatet følger.

Oppgave 6.3.14 Vi har $\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Finn beste approksimasjon til $\vec{z}$ på formen $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$

Med andre ord: Finn $\text{proj}_W \vec{z}$, der $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Løsning: Vi har at $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 10 + 0 - 4 - 6 = 0$

Derfor er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ortogonal basis for W.

Vi regner ut:

$\vec{z} \cdot \vec{v}_1 = 4+0+0+3 = 7$ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 4+1+9 = 14$

$\vec{z} \cdot \vec{v}_2 = 10-8+0-2 = 0$ $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 25+4+16+4 = 49$

Vi får $\text{proj}_W \vec{z} = \frac{\vec{z}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \frac{\vec{z}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\vec{v}_2$

$= \frac{7}{14}\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$

Vi kan skrive

$$\vec{z} = \overbrace{\vec{z} - \text{proj}_W \vec{z}}^{W^\perp} + \overbrace{\text{proj}_W \vec{z}}^{W}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Sjekk for ortogonalitet: $1 + 0 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$ OK!

Oppgave 6.3.18 La $\vec{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$, $W = \text{Span}\{\vec{u}_1\}$.

a. Sett $U = [\vec{u}_1]$. Regn ut $U^T U$ og UU^T

Løsning: $U^T U = \vec{u}_1^T \vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$

$$UU^T = \vec{u}_1 \vec{u}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

b. Regn ut $\text{proj}_W \vec{y}$ og $UU^T \vec{y}$

Løsning: $\vec{y} \cdot \vec{u}_1 = \frac{7}{\sqrt{10}} - \frac{27}{\sqrt{10}} = -\frac{20}{\sqrt{10}}$ $\qquad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$

$$\text{proj}_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = -\frac{20}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$UU^T \vec{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7-27}{10} \\ \frac{-21+81}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{10} \\ \frac{60}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Samme svar! Hvorfor?