Siste del av Seksjon 6.3

Teorem 10 Anta $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ er en ortonormal basis for W.
Da er $\text{proj}_W \vec{y} = \langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \dots + \langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle \vec{u}_p$

Hvis $U = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p]$ så er $\text{proj}_W \vec{y} = UU^T \vec{y}$

Bevis: Vi vet at $\text{proj}_W \vec{y} = \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle}{\langle \vec{u}_p, \vec{u}_p \rangle} \vec{u}_p$

$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1$ for ortonormal basis

$$= \langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \dots + \langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle \vec{u}_p$$

def. av matrisemult.

$$= [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p] \begin{bmatrix} \langle \vec{y}, \vec{u}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{y}, \vec{u}_p \rangle \end{bmatrix}$$

$$= U \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \vec{y} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \end{bmatrix} \vec{y} = UU^T \vec{y} \quad \blacksquare$$

Seksjon 6.4 Gram-Schmidt prosess

Vi har lært: Regne ut $\text{proj}_W \vec{x}$ når vi har en ortogonal basis.

Spørsmål: Hvordan konstruere en ortogonal basis for W.

Anta $W = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, basis for W.

Sett $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{x}_1} \vec{x}_2$. Da er $\vec{x}_2 = \underbrace{\vec{x}_2 - \vec{p}}\ + \underbrace{\vec{p}}$

er ortogonale, så lin. uavh.

Siden $\text{span}\{\vec{x}_2 - \vec{p}, \vec{p}\} \subseteq \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ så vil $\{\vec{x}_2 - \vec{p}, \vec{p}\}$ er en ortogonal basis for W.

Eksempel: La $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, bruk skalarproduktet i $\mathbb{R}^3$.

Disse er lin. uavhengige, men ikke ortogonale.

$$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{x}_1} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1} \vec{x}_1 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 - \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{x}_2 - \vec{p}, \vec{p}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er en ortogonal basis for W

Anta $W = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ $(\{\vec{x}_i\}$ lin. uavh.)

Vi generaliserer ved å splitte opp i n steg.

Steg 1 Sett $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$, $W_1 = \text{Span}\{\vec{x}_1\}$

steg 2 (som over) Sett $\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1}\vec{x}_2$

Da er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ortogonale (se eksemplet over),

$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Sett $W_2 = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

steg k: Antar at vi har laget $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}$, som er en ortogonal basis for $W_{k-1} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}\}$

Sett $\vec{v}_k = \vec{x}_k - \text{proj}_{W_{k-1}}\vec{x}_k$

Vi har at $\vec{x}_k = \underbrace{\vec{x}_k - \text{proj}_{W_{k-1}}\vec{x}_k}_{\vec{v}_k} + \text{proj}_{W_{k-1}}\vec{x}_k$

Her er $\vec{v}_k$ ortogonal på W_{k-1} (ortogonalt dekomp. teorem)

Men da er $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ en ortogonal mengde.

Siden $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \leq \text{Span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$, så er

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ en ortogonal basis for $W_k = \text{Span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$

Oppgave 10 Finn en ortogonal basis for søylerommet til

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\underbrace{}_{\vec{x}_1} \quad \underbrace{}_{\vec{x}_2} \quad \underbrace{}_{\vec{x}_3}$$

Steg 1: Sett $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad W_1 = \text{Span}\{\vec{x}_1\}$

Steg 2: $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \dfrac{-6-24-2-4}{1+9+1+1} \vec{v}_1 = \dfrac{-36}{12} \vec{v}_1 = -3\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$W_2 = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

steg 3: $\text{proj}_{W_2} \vec{x}_3 = \dfrac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \dfrac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$

$= \dfrac{-6+9+6-3}{12} \vec{v}_1 + \dfrac{18+3+6+3}{12} \vec{v}_2$

$= \frac{1}{2} \vec{v}_1 + \frac{5}{2} \vec{v}_2 = \cdots = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Svar: $\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$ er en ortogonal basis for søylerommet.

Eksempel: Finn QR-faktoriseringen for oppgave 10.

Løsning: Vi ser at $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_3\| = \sqrt{9+1+1+1} = \sqrt{12}$

Vi fikk og:

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1 &= -36 & & \vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1 = -\frac{36}{\sqrt{12}} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1 &= 6 & \Rightarrow \quad & \vec{x}_3 \cdot \vec{u}_1 = \frac{6}{\sqrt{12}} \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2 &= 30 & & \vec{x}_3 \cdot \vec{u}_2 = \frac{30}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} \|\vec{v}_1\| & \vec{x}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{x}_3 \cdot \vec{u}_1 \\ 0 & \|\vec{v}_2\| & \vec{x}_3 \cdot \vec{u}_2 \\ 0 & 0 & \|\vec{v}_3\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & -\frac{36}{\sqrt{12}} & \frac{6}{\sqrt{12}} \\ 0 & \sqrt{12} & \frac{30}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{bmatrix}$$

Annen måte å regne ut R:

$$A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T Q R \Rightarrow Q^T A = R$$

Oppgave 24 Anta at $A = QR$, der R er inverterbar.
Vis at A og Q har samme søylerom.

Merk: Hvis $A = QR$ er en QR-faktoring, så følger dette direkte fra konstruksjonen.

Løsning: Viser først at $\operatorname{Col} A \subseteq \operatorname{col} Q$:
Anta $\vec{y} \in \operatorname{col} A$. Da er $\vec{y} = A\vec{x}$ for en $\vec{x}$, men da er
$\vec{y} = A\vec{x} = QR\vec{x} = Q(R\vec{x})$, og da er $\vec{y} \in \operatorname{Col} Q$

Viser så at $\operatorname{Col} Q \subseteq \operatorname{Col} A$:
Anta $\vec{y} \in \operatorname{col} Q$. Da kan vi skrive $\vec{y} = Q\vec{x}$ for en $\vec{x}$.
Men da er $\vec{y} = Q\vec{x} = \underbrace{QR}_{A} R^{-1}\vec{x} = A(R^{-1}\vec{x})$,
og da er $\vec{y} \in \operatorname{Col} A$.
Det følger at $\operatorname{Col} A = \operatorname{Col} Q$ ∎