Forelesning 18/10

Seksjon 6.7 Indreproduktrom

Har tidligere definert indreproduktrom $(\langle \cdot , \cdot \rangle)$

Generaliserte lengde, distanse, ortogonalitet.

Spesielt to nye indreprodukter:

$$\langle p, q \rangle = p(t_0)q(t_0) + \cdots + p(t_n)q(t_n) \qquad (\mathbb{P}_n)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \qquad (C[a,b])$$

Oppgave 6.7.4

Vi ser på $\mathbb{P}_2$ med $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$

Hva blir $\langle p, q \rangle$ når $p(t) = 4t - 3t^2$, $q(t) = 1 + 9t^2$?

Løsning:

$p(-1) = -7 \qquad q(-1) = 10$

$p(0) = 0 \qquad q(0) = 1$

$p(1) = 1 \qquad q(1) = 10$

$$\langle p, q \rangle = -7 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 10 = -70 + 10 = \underline{\underline{-60}}$$

Oppgave 6.7.14

Anta $T: V \to \mathbb{R}^n$ er $1 \to 1$ og lineær.

Vis at $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v})$ er et indreprodukt på V.

Løsning: Aksiom 2:

$$\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle \overset{\text{def.}}{=} T(\vec{u}+\vec{v}) \cdot T(\vec{w})$$
$$= (T(\vec{u}) + T(\vec{v})) \cdot T(\vec{w})$$
$$= T(\vec{u}) \cdot T(\vec{w}) + T(\vec{v}) \cdot T(\vec{w})$$
$$\overset{\text{def.}}{=} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \Rightarrow \text{Aksiom 2 holder.}$$

Aksiom 1 og 3 er tilsvarende

Aksiom 4: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \underbrace{T(\vec{u}) \cdot T(\vec{u})}_{= \|T(\vec{u})\|^2} \geq 0$

Anta $\vec{u} \neq \vec{0}$. Da er $T(\vec{u}) \neq 0$ siden T er $1 \to 1$.

Men da er $T(\vec{u}) \cdot T(\vec{u}) > 0$, slik at $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$

Derfor holder aksiom 4 og.

Oppgave 6.7.28

Vi ser på $V = C[0,1]$, med $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$

Hva blir $\langle f, g \rangle$ når $f(t) = 5t - 2$, $g(t) = 7t^3 - 6t^2$?

Løsning: Vi har $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (5t-2)(7t^3 - 6t^2)\, dt$

$$= \int_0^1 (35t^4 - 30t^3 - 14t^3 + 12t^2)\, dt$$
$$= \int_0^1 (35t^4 - 44t^3 + 12t^2)\, dt = \left[7t^5 - 11t^4 + 4t^3 \right]_0^1$$
$$= 7 - 11 + 4 = \underline{\underline{0}} \quad \text{(funksjonene er ortogonale).}$$

Projeksjoner og Gram-Schmidt kan gjøres generelt i indreproduktrom.

$\text{proj}_W f$: Beste approksimasjon til f fra W.

Oppgave 6.7.8 Hva er $\text{proj}_p q$, der p, q er fra oppgave 6.7.4 ?

Løsning: Vi har at $\text{proj}_p q = \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p = \frac{-60}{(-7)^2+0^2+1^2} p = -\frac{60}{50} p$
$= -\frac{6}{5}(4t-3t^2)$

To nye resultater:

Vi husker: $\vec{v} = \underbrace{\vec{v} - \text{proj}_W \vec{v}}_{\in W^\perp} + \underbrace{\text{proj}_W \vec{v}}_{\in W}$

Fra pythagoras: $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v} - \text{proj}_W \vec{v}\|^2 + \|\text{proj}_W \vec{v}\|^2$

Spesielt : $\|\vec{v}\| \geq \|\text{proj}_W \vec{v}\|$

Teorem 16 (Cauchy-Schwarz ulikhet)
For alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ så er $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Bevis: Hvis $\vec{u} = \vec{0}$ er dette opplagt riktig.
Anta $\vec{u} \neq \vec{0}$. La $W = \text{Span}\{\vec{u}\}$. Vi har

$$\|\text{proj}_W \vec{v}\| = \left\| \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle} \vec{u} \right\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle|}{|\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle|} \|\vec{u}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle|}{\|\vec{u}\|^2} \|\vec{u}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle|}{\|\vec{u}\|} \leq \|\vec{v}\|$$

Ganger opp med $\|\vec{u}\|$ og får $|\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ ∎

$\boxed{\text{Teorem 17 (trekantulikheten)} \quad \text{For } \vec{u},\vec{v}\in V \text{ så har vi at } \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$

Bevis: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u},\vec{u}\rangle + \langle \vec{v},\vec{u}\rangle + \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{v}\rangle$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Resultatet følger ved å ta kvadratrot ∎

Oppgave 6.7.26 La $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bruk Cauchy-Schwarz til å vise at $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

Løsning: Vi har $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a+b$

Cauchy-Schwarz: $|a+b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \blacksquare$$

Oppgave 6.7.32 $V = C[-2,2]$, $\langle f,g\rangle = \int_{-2}^{2} f(t)g(t)\,dt$

Finn ortogonal basis for Span $\{\underbrace{1}_{\vec{x}_1}, \underbrace{t}_{\vec{x}_2}, \underbrace{t^2}_{\vec{x}_3}\}$

Løsning: Gram-Schmidt:

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1\rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1 = \vec{x}_2 - \frac{\int_{-2}^{2} t\,dt}{\int_{-2}^{2} 1\,dt} = \vec{x}_2 = t$$

$$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{v}_1\rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{v}_2\rangle}{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2\rangle}\vec{v}_2 = \vec{x}_3 - \frac{\int_{-2}^{2} t^2\,dt}{\int_{-2}^{2} 1\,dt}\underbrace{\vec{v}_1}_{1} - \frac{\int_{-2}^{2} t^3\,dt}{\int_{-2}^{2} t^2\,dt}\underbrace{\vec{v}_2}_{t}$$

$$= t^2 - \frac{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{2}}{4}$$

$$= t^2 - \frac{\frac{16}{3}}{4} = \underline{t^2 - \frac{4}{3}}$$

Ortogonal basis: $\underline{\underline{\{1, t, t^2 - \frac{4}{3}\}}}$

Seksjon 6.8

Fourierrekker

Vi ser på $C[0,2\pi]$, med indreproduktet $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$

Vi skal se på $W = \text{Span}\{1, \cos t, \dots, \cos nt, \sin t, \dots, \sin nt\}$

Beste approksimasjon til f fra W kalles også for
n'te ordens Fourierrekka til f. Skriver også f_n for denne.

Det viser seg at $1, \cos t, \dots, \cos nt, \sin t, \dots, \sin nt$ er ortogonale:

$m \neq n$: $\langle \cos mt, \cos nt\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\,dt$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\cos(\underbrace{mt+nt}_{(m+n)t}) + \cos(mt-nt)\Big)dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)t) + \frac{1}{m-n}\sin((m-n)t)\Big]_0^{2\pi} = 0$$

Det følger at vi kan skrive:

$$f_n(t) = \underbrace{\frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}}_{a_0}1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\frac{\langle f,\cos kt\rangle}{\langle \cos kt, \cos kt\rangle}}_{a_k}\cos kt + \underbrace{\frac{\langle f,\sin kt\rangle}{\langle \sin kt,\sin kt\rangle}}_{b_k}\sin kt\Big)$$

Vi har at $\langle 1,1\rangle = 2\pi$

Oppgave 7 til neste uke: $\langle \cos kt, \cos kt\rangle = \langle \sin kt, \sin kt\rangle = \pi$

a_k, b_k over kalles for Fourierkoeffisienter

Vi har da: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

Oppgave 6.8.10

Finn 3. ordens Fourierrekka til $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \pi \\ -1 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$

Løsning: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\,dt \right) = 0$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot\cos kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\cos kt\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin kt\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin kt\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{k}\cos kt\right]_{\pi}^{2\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left(1 - \cos k\pi + 1 - \cos k\pi \right)$$

$$= \frac{2 - 2\cos k\pi}{\pi k} = \begin{cases} 0 & k \text{ partall} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ oddetall} \end{cases}$$

Det følger at $f_3(t) = b_1 \sin t + b_3 \sin t = \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t.$ ■