Oppgave 6.8.12: Hva er 3. ordens Fourierrekke til $f(t) = \sin^3 t$?
(skal ikke regne ut noen integraler).

Løsning: Vi vet at $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, og får da

$$\sin^3 t = \frac{1}{2}\sin t\,(1-\cos 2t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos 2t$$

$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\big(\sin(t+2t) + \sin(t-2t)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin(-t)$$

$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t + \frac{1}{4}\sin t$$

$$= \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

brukte $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$
$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$

Dette viser at $\sin^3 t \in W = \text{Span}\{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \sin t, \sin 2t, \sin 3t\}$, men da er $\sin^3 t$ lik sin egen 3. ordens Fourierrekke.

Seksjon 6.5 Ortogonalitet og minste kvadraters metode

Spørsmål: $A\vec{x}=\vec{b}$ har ikke alltid en løsning, men hvilken $\vec{x}$ gir "minst feil": $\|A\vec{x}-\vec{b}\|$

Definisjon: Hvis A er $m\times n$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$, en minste kvadraters løsning til $A\vec{x}=\vec{b}$ er en $\hat{\vec{x}}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\|\vec{b}-A\hat{\vec{x}}\|\leq\|\vec{b}-A\vec{x}\| \quad \text{for alle } \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

Sett $\hat{\vec{b}}=\operatorname{proj}_{\operatorname{Col}A}\vec{b}$. Da er $\hat{\vec{b}}\in\operatorname{Col}A$, slik at finnes $\hat{\vec{x}}$ s.a. $A\hat{\vec{x}}=\hat{\vec{b}}$.

Fra seksjon 6.3 (teorem for beste approksimasjon):

$$\|\hat{\vec{b}}-\vec{b}\|\leq\|\vec{y}-\vec{b}\| \quad \text{for alle } \vec{y}\in\operatorname{Col}A.$$
$$\Updownarrow$$
$$\|A\hat{\vec{x}}-\vec{b}\|\leq\|A\vec{x}-\vec{b}\| \quad \text{alle } \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

Det følger: $\hat{\vec{x}}$ minste kvadraters løsning $\Leftrightarrow$ $A\hat{\vec{x}}=\hat{\vec{b}}$.

To måter å løse $A\hat{\vec{x}}=\hat{\vec{b}}$:

1. Regn ut $\hat{\vec{b}}$, radreduser $[A\ \ \hat{\vec{b}}]$ for å finne $\hat{\vec{x}}$
2. Løse normallikningene $A^TA\hat{\vec{x}}=A^T\vec{b}$

Siden $\vec{b}=\underbrace{\vec{b}-\hat{\vec{b}}}_{(\operatorname{Col}A)^\perp}+\underbrace{\hat{\vec{b}}}_{\operatorname{Col}A}$ så må $\vec{b}-\hat{\vec{b}}$ være ortogonal på $\operatorname{Col}A$

$$\vec{a}_j\cdot(\vec{b}-\hat{\vec{b}})=0 \quad (\vec{a}_j \text{ søyle i } A)$$
$$\vec{a}_j^T(\vec{b}-A\hat{\vec{x}})=0 \quad \text{alle } j$$
$$A^T(\vec{b}-A\hat{\vec{x}})=\vec{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$A^TA\hat{\vec{x}}=A^T\vec{b}$$

Teorem 13: Minste kvadraters løsningene til $A\vec{x}=\vec{b}$ er lik løsningene av normallikningene $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$

Bevis: $\Downarrow$ er vist over.

$\Uparrow$ Anta $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$. Da er $A^T(\vec{b}-A\vec{x})=\vec{0}$

$$\Updownarrow$$
$$\vec{a}_j^T(\vec{b}-A\vec{x})=0 \quad \text{alle } j$$

Dermed er $\vec{b}-A\vec{x}$ ortogonal på $\operatorname{Col}A$.

Vi har $\vec{b}=\underbrace{A\vec{x}}_{\operatorname{Col}A}+\underbrace{(\vec{b}-A\vec{x})}_{(\operatorname{Col}A)^\perp}$, slik at $A\vec{x}=\hat{\vec{b}}$, siden denne dekomposisjonen er unik

$=\hat{\vec{b}}+(\vec{b}-\hat{\vec{b}})$

Slik at $A\vec{x}=\hat{\vec{b}}$, og da er $\vec{x}$ en minste kvadraters løsning ∎

Oppgave 6.5.4

Med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, finn minste kvadraters løsningene for $A\vec{x} = \vec{b}$

Løsning:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Utvidet matrise for $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 16 \\ -2 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & -2 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 0 & 25 & 25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette viser at $\hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ er den unike minste kvadraters løsningen.

Feilen blir $\| A\hat{\vec{x}} - \vec{b} \| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \quad \blacksquare$$

Merk: Vi har alltid en minste kvadraters løsning, men hvis A^TA ikke er inverterbar trenger den ikke være unik:

Oppgave 6.5.6

Med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, finn minste kvadraters løsningene av $A\vec{x} = \vec{b}$

Løsning:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 27 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$[A^TA \quad A^T\vec{b}] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 27 \\ 3 & 3 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ løsningene er: $\begin{matrix} x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = 5 - x_3, \; x_2 = x_3 - 1$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 - x_3 \\ x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

Oppgave 6.5.10

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, med kolonner $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

(a) Finn projeksjonen av $\vec{b}$ ned på col A.

Løsning: Søylene i A er her ortogonale: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 - 4 + 2 = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{a}_1 = 3 + 1 + 5 = 9$

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$\vec{b} \cdot \vec{a}_2 = 6 - 4 + 10 = 12$

$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 4 + 16 + 4 = 24$

Da er

$$\text{proj}_{\text{Col}A}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}_1}{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1}\vec{a}_1 + \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}_2}{\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2}\vec{a}_2 = \frac{9}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{12}{24}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

(b) Finn minste kvadraters løsningen av $A\vec{x} = \vec{b}$.

Løsning: Vi løser $A\hat{\vec{x}} = \hat{\vec{b}} = \text{proj}_{\text{Col}A}\vec{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kunne her også løst $\left[A^TA \quad A^T\vec{b} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 24 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

slik at vi fikk samme løsning ∎

Teorem 14 Anta A er $m \times n$. Følgende er ekvivalent:

a. $A\vec{x} = \vec{b}$ har en unik minste kvadraters løsning for enhver $\vec{b}$

b. Søylene til A er lineært uavhengige

c. $A^T A$ er inverterbar

Når a.-c. er sanne: Minste kvadraters løsningen $\hat{\vec{x}}$ er gitt ved

$$(*) \qquad \hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Bevis: Oppgave 6.5.27 til neste uke: $A\vec{x} = \vec{0} \iff A^T A \vec{x} = \vec{0}$

Fra dette følger: søylene i A lin. uavh. $\iff$ søylene i $A^T A$ lin. uavh.

$$\Updownarrow$$

$A^T A$ er inverterbar

Dette viser b. $\Leftrightarrow$ c.

c. $\Rightarrow$ a. Følger av normallikningene, som da sier $(*)$

a. $\Rightarrow$ b. Anta søylene til A er lineært avhengige.
Da finnes $\vec{x}$ slik at $A\vec{x} = \vec{0}$
Siden $A\vec{x} = \vec{0} = \hat{\vec{0}}$ så er $\vec{x}$ og $\vec{0}$ begge
minste kvadraters løsninger av $A\vec{x} = \vec{0}$,
som viser at a. ikke holder for $\vec{b} = \vec{0}$ ∎

Merk: Hvis A har lineært uavhengige søyler, og $A = QR$ er en QR-faktorisering, så sier (*) at

$$\hat{\vec{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = (R^T\underbrace{Q^TQ}_{I}R)^{-1}R^TQ^T\vec{b}$$
$$= (R^TR)^{-1}R^TQ^T\vec{b}$$
$$= R^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^T\vec{b}$$
$$= R^{-1}Q^T\vec{b}$$

Det følger at $R\hat{\vec{x}} = Q^T\vec{b}$

Vi kan altså finne $\hat{\vec{x}}$ ved å radredusere $\begin{bmatrix} R & Q^T\vec{b}\end{bmatrix}$.

Oppgave 6.4.10 på ny

Her fant vi QR-faktoriseringen

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\sqrt{12}\begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R}$$

minste kvadraters løsning til $A\vec{x} = \vec{b}$ med $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, regnet ut med QR-faktorisering:

$$Q^T\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R & Q^T\vec{b} \end{bmatrix} = \left[\sqrt{12}\begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \sqrt{12}\begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$