Forelesning 28/10

Seksjon 6.8 Anvendelser av indreproduktrom

Vektede minste kvadraters metode

En variant av minste kvadraters metode som tar hensyn til at ikke alle observasjoner $x_1, \dots, x_n$ er like pålitelige.

Vi vil legge en vekt w_i på observasjon i s.a. stor vekt $\Rightarrow$ pålitelig måling:

$$\|\vec{x}\|^2 := \sum_{i=1}^{n} w_i^2 x_i^2$$

svarer til lengde utledet fra indreproduktet

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 x_i y_i = (W\vec{x}) \cdot (W\vec{y})$$

der $W = \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{bmatrix}$

ny norm

Vi ser etter $\hat{\vec{x}}$ s.a. $\|A\hat{\vec{x}} - \vec{y}\|^2$ er minst mulig

$$\Updownarrow$$

gammel norm (euklidsk)

$$\|W(A\hat{x} - \vec{y})\|^2 \text{ er minst mulig}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|WA\hat{x} - W\vec{y}\|^2 \text{ minst mulig}$$

Dette svarer til minste kvadraters tilnærmingen til $W\vec{y}$ fra søylerommet ti WA!

Normallikningene: $(WA)^T WA\vec{x} = (WA)^T W\vec{y}$

Oppgave 2

Anta 25 målinger, og at 5 første målinger $(x_1,\dots,x_5)$ er halvparten så pålitelige.

Metode 1: $\omega_1 = \cdots = \omega_5 = \frac{1}{2}$, $\omega_6 = \cdots = \omega_{25} = 1$

$$\Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Metode 2: $\omega_1 = \cdots = \omega_5 = 1$, $\omega_6 = \cdots = \omega_{25} = 2$

$$\Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $W_2 = 2W_1$. Dette gir:

$$\|W_2 A\hat{x} - W_2\vec{y}\| \text{ minst mulig}$$
$$\Updownarrow$$
$$2\|W_1 A\hat{x} - W_1\vec{y}\| \text{ minst mulig}$$
$$\Updownarrow$$
$$\|W_1 A\hat{x} - W_1\vec{y}\| \text{ minst mulig.}$$

Derfor gir metode 1 og metode 2 samme løsning ∎

Trendanalyse

La f være en ukjent funksjon

Vi ser på indreproduktet

$$(*) \quad \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \vec{p}(t_0)\vec{q}(t_0) + \cdots + \vec{p}(t_n)\vec{q}(t_n) \quad \text{på } \mathbb{P}_n$$

Det finnes en unik $\vec{g} \in \mathbb{P}_n$ s.a. $\vec{g}(t_i) = \vec{f}(t_i)$ alle i

La $\hat{g}$ være den ortogonale projeksjonen ned på $\mathbb{P}_3$.

$\hat{\vec{g}}$ kalles en kubisk trendfunksjon

La $\{\vec{p_0}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}\}$ være en ortogonal basis for $\mathbb{P}_3$

Vi kan da skrive $\hat{\vec{g}} = c_0\vec{p_0} + c_1\vec{p_1} + c_2\vec{p_2} + c_3\vec{p_3}$

c_i'ene kalles for trendkoeffisienter.

Oppgave 4

a) La oss bruke $t_0 = -5$, $t_1 = -3$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 3$, $t_5 = 5$

Hva blir de 3 første ortogonale polynomene, som er en basis for $\mathbb{P}_2$?

Løsning: Gram-Schmidt på $\{1, t, t^2\}$

$$\vec{p_0} = 1$$

$$\vec{p_1} = t - \frac{\langle t, \vec{p_0} \rangle}{\langle \vec{p_0}, \vec{p_0} \rangle}\vec{p_0} = t$$

$$\vec{p_2} = t^2 - \frac{\langle t^2, \vec{p_0} \rangle}{\langle \vec{p_0}, \vec{p_0} \rangle}\vec{p_0} - \frac{\langle t^2, \vec{p_1} \rangle}{\langle \vec{p_1}, \vec{p_1} \rangle}\vec{p_1}$$

$$= t^2 - \frac{70}{6} = t^2 - \frac{35}{3}$$

$$\langle \vec{p_0}, \vec{p_0} \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$\langle t, \vec{p_0} \rangle = (-5)\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 0$$

$$\langle \vec{p_1}, \vec{p_1} \rangle = (-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 = 70$$

$$\langle t^2, \vec{p_0} \rangle = \cdots = 70$$

$$\langle t^2, \vec{p_1} \rangle = (-5)^3 + (-3)^3 + (-1)^3 + 1^3 + 3^3 + 5^3 = 0$$

Vi vil også at verdiene i t_i skal være heltall

$p_2(\pm 5) = \frac{40}{3}$, $p_2(\pm 3) = -\frac{8}{3}$, $p_2(\pm 1) = -\frac{32}{3}$

Gang p_2 med 3:

$3p_2(\pm 5) = 40 \qquad 3p_2(\pm 3) = -8 \qquad , 3p_2(\pm 1) = -32$

Deler med 8:

$\frac{3}{8}p_2(\pm 5) = 5 \qquad \frac{3}{8}p_2(\pm 3) = -1 \qquad \frac{3}{8}p_2(\pm 1) = -4$

Vi kan derfor sette $p_2(t) = \frac{3}{8}\left(t^2 - \frac{35}{3}\right) = \frac{3}{8}t^2 - \frac{35}{8}$

Vi bruker basisen $\{1, t, \frac{3}{8}t^2 - \frac{35}{8}\}$ videre.

b) Finn en kvadratisk trendfunksjon for
$(-5,1)$, $(-3,1)$, $(-1,4)$, $(1,4)$, $(3,6)$, $(5,8)$

Løsning: La $\vec{g}$ være det unike 5. grads polynomet gjennom disse.

Vi hadde: $\langle \vec{p_0}, \vec{p_0} \rangle = 6$

$\langle \vec{p_1}, \vec{p_1} \rangle = 70$

Vi får og $\langle \vec{p_2}, \vec{p_2} \rangle = 5^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 5^2 = 84$

$\langle \vec{g}, \vec{p_0} \rangle = 1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 8 = 24$

$\langle \vec{g}, \vec{p_1} \rangle = 1\cdot(-5) + 1\cdot(-3) + 4\cdot(-1) + 4\cdot 1 + 6\cdot 3 + 8\cdot 5 = 50$

$\langle \vec{g}, \vec{p_2} \rangle = 1\cdot 5 + 1\cdot(-1) + 4\cdot(-4) + 4(-4) + 6(-1) + 8\cdot 5 = 5-1-16-16-6+40 = 6$

Kvadratisk trendfunksjon:

$$\hat{g} = \frac{\langle \vec{g}, \vec{p_0} \rangle}{\langle \vec{p_0}, \vec{p_0} \rangle}\vec{p_0} + \frac{\langle \vec{g}, \vec{p_1} \rangle}{\langle \vec{p_1}, \vec{p_1} \rangle}\vec{p_1} + \frac{\langle \vec{g}, \vec{p_2} \rangle}{\langle \vec{p_2}, \vec{p_2} \rangle}\vec{p_2}$$

$$\underbrace{\frac{24}{6}}_{c_0}\cdot 1 + \underbrace{\frac{50}{70}}_{c_1} t + \underbrace{\frac{6}{84}}_{c_2}\left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{35}{8}\right)$$

(trendkoeffisienter)

$$= \frac{3}{112}t^2 + \frac{5}{7}t + \frac{59}{16}$$

Kan regne ut interpolerende polynom $(a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5)$ ved å løse

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^5 \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^5 \\ \vdots & & & \\ 1 & t_5 & \cdots & t_5^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$