Repetisjon kap. 4

Supplementary exercises

Oppg. 20

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 2a+3b+4c \\ 3a+4b+5c \\ 4a+5b+6c \end{bmatrix} \quad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Finn en basis for V.

Løsning: Vi skriver

$$\begin{bmatrix} a+2b+3c \\ 2a+3b+4c \\ 3a+4b+5c \\ 4a+5b+6c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Derfor: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ utspenner V. Er de en basis?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ser at de to første søylene er pivotsøyler, slik at

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for V.

Oppg. 30 a) Vis at $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A$

Løsning: Vi har at $\operatorname{Col}(AB) \subseteq \operatorname{Col} A$

$$A(B\vec{x})$$

Da er $\dim \operatorname{Col}(AB) \leq \dim \operatorname{Col} A$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A$$

b) Vis at $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} B$

Løsning: Vi har at $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(AB)^T = \operatorname{rang} B^T A^T \overset{a)}{\leq} \operatorname{rank} B^T = \operatorname{rank} B$

Oppg 31 Anta Q inverterbar. Vis at $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank} A$

Løsning: Fra oppgave 30: $\operatorname{rank}(AQ) \leq \operatorname{rank} A$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AQQ^{-1}) \leq \operatorname{rank}(AQ)$$

Det følger at $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AQ)$

Oppg 32 Anta P inverterbar, $m \times m$. Vis at $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank} A$

Løsning: $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank}(PA)^T = \operatorname{rank} \underbrace{A^T P^T}_{\text{inverterbar}} = \operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A$

hårper det.

Eksamen 2017 Oppgave 4

- $\mathbb{P}_2$: Vektorrommet av alle reelle polynomer av grad ≤ 2
- B : Standardbasisen for $\mathbb{P}_2$ $(p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2)$
- $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$ der $q_1(t) = 1+t$, $q_2(t) = t + t^2$, $q_3(t) = t - t^2$

a) Vis at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$.
- Finn basisskiftematrisene $P_{B \leftarrow C}$, $P_{C \leftarrow B}$

Løsning: Vi bruker koordinatsavbildningen:

$$\begin{bmatrix} [q_1]_B & [q_2]_B & [q_3]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$ Er denne inverterbar?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Siden matrisen er inverterbar følger det at $\mathcal{C}$ også er en basis, og

$$P_{B \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [q_1]_B & [q_2]_B & [q_3]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow B} = \left(P_{B \leftarrow C}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Finn $[T]_B$ og $[T]_C$ der T er definert ved

$$(T(p))(t) = p(1) + tp'(t)$$

Løsning:

$$T(p_0) = 1 + t\cdot 0 = 1 \qquad [T(p_0)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(p_1) = 1 + t\cdot 1 = 1 + t \qquad [T(p_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(p_2) = 1 + t\cdot 2t = 1 + 2t^2 \qquad [T(p_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \big[\, [T(p_0)]_B \;\; [T(p_1)]_B \;\; [T(p_2)]_B \,\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_C = P_{C\leftarrow B}\,[T]_B\,P_{B\leftarrow C} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

c)
- Finn en egenvektor for $[T]_B$ med egenverdi 2.
- Finn $p \in \mathbb{P}_2$ slik at $T(p) = 2p$

Løsning:

$$[T]_B - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

egenvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Setter vi $x_3 = 1$ får vi egenvektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sett $p(t) = 1 + t^2$. Da er $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}$

Da er: $[T(p)]_B = [T]_B [p]_B = [T]_B \vec{v} = 2\vec{v} = 2[p]_B = [2p]_B$

Dette betyr at $T(p) = 2p$, siden koordinatsavbildningen er en isomorfi.

Oppgave 3 Eksamen 2013

a) Vi setter $B = \{p_1, p_2, p_3\}$, der $p_1(x) = x^2+1$
$p_2(x) = x+1$
$p_3(x) = x^2$

Er B en basis for P_2?

Løsning: Vi vet at $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ er en basis for $\mathbb{P}_2$.

Vi regner ut $[\,[p_1]_\mathcal{E} \;\; [p_2]_\mathcal{E} \;\; [p_3]_\mathcal{E}\,]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denne er inverterbar, siden determinant 1.

Dermed er B også en basis for $\mathbb{P}_2$.

b) Definerer $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ved $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$

Finn matrisen til T relativt til B

Løsning: Ingen basis for $\mathbb{R}^3$ spesifisert, så vi antar standardbasisen.

$T(\vec{p}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad T(p_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad T(p_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [T]_B = [\,T(p_1) \;\; T(p_2) \;\; T(p_3)\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$