MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 11

Ole Brevig

Matematisk institutt

15. september 2021

Migrasjonsmatrise

- Matrisen $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$ har likevektsvektoren $\mathbf{q} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5333\ldots \\ 0.2 \\ 0.2666\ldots \end{bmatrix}$.
- Markovs teorem forteller oss at følgen definert ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$$

  vil konvergere mot $\mathbf{q}$ uansett hvordan vi velger sannsynlighetsvektoren $\mathbf{x}_0$.
- Hvis vi ikke orker å regne ut $\mathbf{q}$ nøyaktig ved å løse $(P - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kan vi alternativt finne et estimat for $\mathbf{q}$ ved å velge en tilfeldig startvektor $\mathbf{x}_0$ og iterativt regne ut $\mathbf{x}_k$.

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.466\ldots \\ 0.266\ldots \\ 0.266\ldots \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.513\ldots \\ 0.213\ldots \\ 0.253\ldots \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.528\ldots \\ 0.216\ldots \\ 0.254\ldots \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.533\ldots \\ 0.208\ldots \\ 0.258\ldots \end{bmatrix}$$

- Etter bare fire iterasjoner har vi funnet et estimat for $\mathbf{q}$ som er nøyaktig opp til $1/100$.

Eksempel 5.1.4. (Forelesning 7)

- La $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.
- Egenverdiene er $\lambda_1 = 9$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
- En basis for egenrommene er $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Oppsummering

1. La A være en $n \times n$ matrise. Potensmetoden er en algoritme som gir et estimat for den av egenverdiene til A som har størst absoluttverdi og en tilhørende egenvektor.
   (1) Velg en vektor $\mathbf{x}_0$ slik at den største absoluttverdien av tallene i $\mathbf{x}_0$ er lik 1.
   (2) For $k = 0, 1, \ldots$
      (a) Regn ut $A\mathbf{x}_k$.
      (b) La μ_k være det tallet i $A\mathbf{x}_k$ med størst absoluttverdi.
      (c) Regn ut $\mathbf{x}_{k+1} = \mu_k^{-1} A\mathbf{x}_k$.
   (3) Da vil μ_k være et estimat for den egenverdien til A som har størst absoluttverdi og $\mathbf{x}_{k+1}$ et estimat for en tilhørende egenvektor.
2. For å finne andre egenverdier kan vi bruke invers potensmetode.