MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 12

Ole Brevig

Matematisk institutt

16. september 2021

Repetisjon

- Når vi regner med vektorer og matriser, bruker vi (som regel uten å tenke på det) standardbasisen $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$. Vi minner om at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Vi leser vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ som $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

- Hvis $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, så er $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. Altså blir

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Oppsummering

1. La T være en lineærtransformasjon på et n-dimensjonalt vektorrom V med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. La $\mathbf{a}_j$ være koordinatvektoren til $T(\mathbf{b}_j)$ med hensyn på $\mathcal{B}$, det vil si

$$\mathbf{a}_j = \big[T(\mathbf{b_j})\big]_{\mathcal{B}}$$

for $j = 1, 2, \ldots, n$. Definer matrisen $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$. Da er

$$\big[T(\mathbf{x})\big]_{\mathcal{B}} = \big[T\big]_{\mathcal{B}} \big[\mathbf{x}\big]_{\mathcal{B}}.$$

2. La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og sett $P = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$. Hvis A og C er $n \times n$ matriser, så er

$$[A]_{\mathcal{B}} = C \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = PCP^{-1}.$$

3. A er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis $\mathcal{B}$ slik at $[A]_{\mathcal{B}}$ er diagonal.