MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 13

Ole Brevig

Matematisk institutt

20. september 2021

Uke 38

- Forelesning 14 — Kapittel 5.7. Mer om dynamiske systemer

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k.$$

- Forelesning 15 — Kapittel 5.8. Differensialligninger for parametriske kurver. Ligningene

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \qquad\quad - \; x_2(t) - \; x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + \; x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + \; x_2(t) + 2x_3(t) \end{aligned}$$

  kan skrives på matriseform som $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

- Forelesning 13 — Kapittel 5.5. Forstå matriser som

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

  fra Forelesning 7.

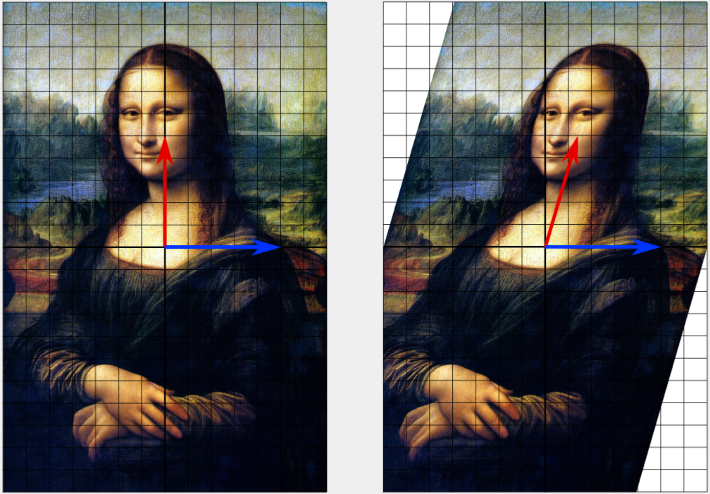
Regneregler for komplekse matriser og vektorer

- Addisjon, matrisemultiplikasjon og (kompleks) skalarmultiplikasjon er som vanlig.
- Vi kan også gjøre (komplekse) radoperasjoner på vanlig måte.
- Den kompleks konjugerte til det komplekse tallet $a + bi$ er $\overline{a + bi} = a - bi$.
- Vi har

$$\overline{r\mathbf{z}} = \bar{r}\bar{\mathbf{z}}, \qquad \overline{A\mathbf{z}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}} \qquad \text{og} \qquad \overline{rA} = \bar{r}\bar{A}$$

  der r er et komplekst tall, $\mathbf{z}$ en kompleks vektor og A en kompleks matrise.
- Et tall r, en vektor $\mathbf{z}$ eller en matrise A er reell, henholdsvis, hvis og bare hvis

$$\bar{r} = r, \qquad \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z} \qquad \text{eller} \qquad \bar{A} = A.$$



Figur: Geometrisk effekt av matrisen $A = \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}P^{-1}$, for et (lite) tall $k > 0$.

Oppsummering

1. En 2x2 matrise A av reelle tall er enten similær med
   - en diagonalmatrise $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$,
   - en shear-matrise $T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$,
   - eller en roter–og–skaler matrise $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.
2. For roter–og–skaler har A to komplekse egenverdier som er konjugerte,
$$\lambda_1 = a + bi = re^{i\theta} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = a - bi = re^{-i\theta}.$$
3. Hvis $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ for en kompleks vektor $\mathbf{v} \neq 0$ og $\lambda = a - bi$ med $b \neq 0$, så er $A = PCP^{-1}$ der
$$P = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\mathbf{v} & \operatorname{Im}\mathbf{v} \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$