MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 14

Ole Brevig

Matematisk institutt

22. september 2021

Diskrete dynamiske systemer

- Dagens mål er å analysere langsiktig oppførsel av et diskret dynamisk system

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

for en startvektor $\mathbf{x}_0$ ved studere egenverdiene til A.

- Dersom $n \times n$ matrisen A er diagonaliserbar har vi en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ som oppfyller $A\mathbf{v}_j = \lambda\mathbf{v}_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. Vi kan da unikt representere startvektoren

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

- Følgelig blir

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n,$$

så egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ beskriver det dynamiske systemet.

Eksamen 2008: Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ og la $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betegne lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. La videre $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ være den basisen for $\mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Beregn koordinatmatrisen $B = \big[T\big]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på $\mathcal{B}$ og skriv B på formen rR_θ der r er et positivt tall og R_θ er standardmatrisen til en rotasjon i $\mathbb{R}^2$ om origo med vinkel θ (mot klokken).

(b) Begrunn at A ikke er diagonaliserbar når den betraktes som en reell matrise. Angi de komplekse egenverdiene til A og en tilhørende kompleks egenvektor for hver av disse.

(c) Matrisen A er opplagt invertibel og vi setter $C = A^{-1}$. La $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ og betrakt det dynamiske systemet gitt ved $\mathbf{x}_{k+1} = C\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Begrunn at $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ når $k \to \infty$.

Oppsummering

1. Gitt en startvektor $\mathbf{x}_0$ og en matrise A, kan vi analysere det dynamiske systemet

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

   ved å regne ut egenverdier (og egenvektorer) til A.

2. Dersom A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$ så har vi

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{y}_{k+1} = D\mathbf{y}_k$$

   der $\mathbf{y}_k = P^{-1}\mathbf{x}_k$.