MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 15

Ole Brevig

Matematisk institutt

23. september 2021

Anvendelser på differensialligninger

- Fra kalkulus husker vi at differensialligningen

$$f'(t) = af(t)$$

  har generell løsning $f(t) = Ce^{at}$ der C er en vilkårlig konstant.
- Gitt en initialbetingelse $f(0) = b$, kan vi finne den spesielle løsningen $f(t) = be^{at}$.
- Dagens mål er å studere systemer av lineære differensialligninger. Ligningene

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= - x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \end{aligned}$$

  kan skrives på matriseform som $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ der $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Her vil den generelle løsningen være en familie av parametriske kurver $\mathbf{x}(t)$ og den spesielle løsningen vil oppfylle en initialbetingelse $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Eksamen 2018: Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.

(b) Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.

(c) Finn den generelle løsningen av systemet av differensialligninger

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

der $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Bestem deretter løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$.

```
>> C

C =

    -1    -1    -1     1
     1     0     1    -1
     0     1     1     1

>> rref(C)

ans =

     1     0     0    -2
     0     1     0     0
     0     0     1     1
```

Figur: MATLAB-vedlegg fra Eksamen 2018.

Oppsummering

1. La A være en $n \times n$ matrise. Systemet av differensialligninger

   $$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}.$$

   har n lineært uavhengige løsninger.
2. Superposisjon: Enhver lineærkombinasjon av løsningene er også en løsning.
3. Dersom A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$ så har vi

   $$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$$

   der $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(k)$.

Neste forelesning

- Siste bit av Kapittel 5.7: Løse $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ når A har komplekse egenverdier.
- Oblig 1.