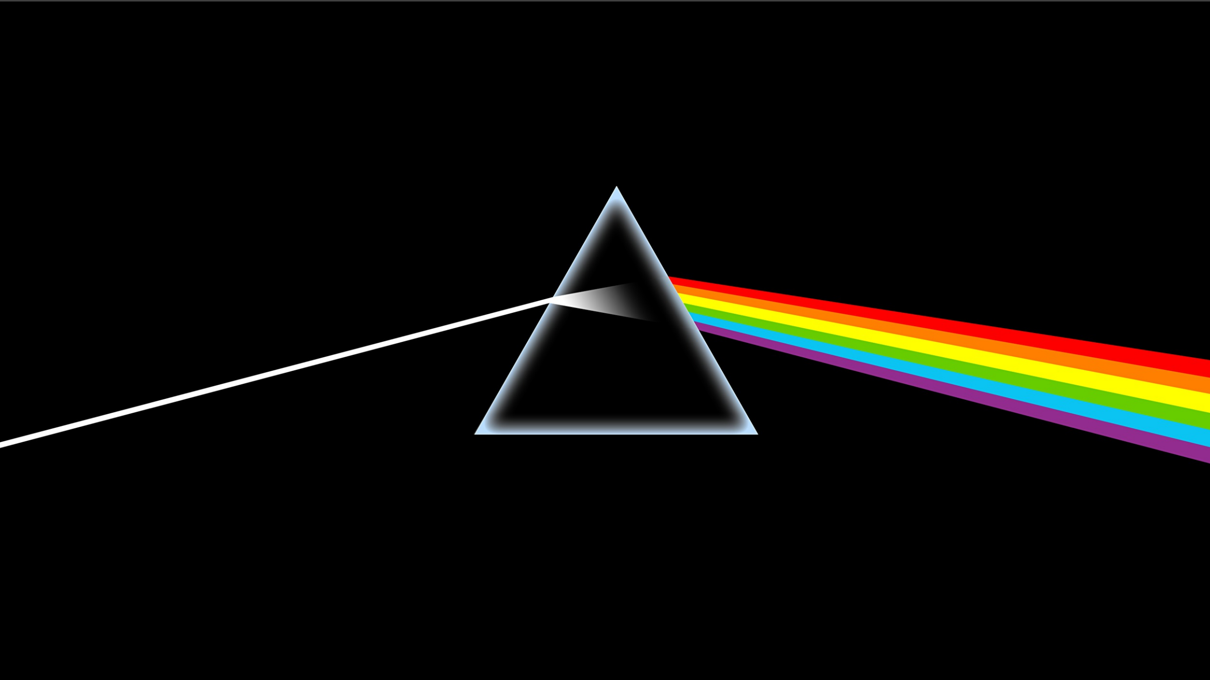
MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 28

Ole Brevig

Matematisk institutt

1. november 2021



Diagonalmatriser (igjen)

- Standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dots \qquad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

  og hvis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ så er $\mathbf{x} \bullet \mathbf{e_j} = x_j$.

- Betrakt diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

- Spektraldekomposisjon: $D\mathbf{x} = \lambda_1 (\mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_1)\, \mathbf{e}_1 + \lambda_2 (\mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_2)\, \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_n)\, \mathbf{e}_n$.

Teorem 5.5 (Diagonaliseringsteoremet)

En $n \times n$ matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

For diagonalmatrisen D har vi egenvektorene $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Dette er en ortonormal mengde, som betyr at $\mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_k = 0$ for $j \neq k$ og at $\mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_j = 1$.

Definisjon

En $n \times n$ matrise A kalles ortogonalt diagonaliserbar dersom A har n egenvektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ slik at $\mathcal{B}$ er en ortonormal mengde.

Eksempel 5.1.4. (Forelesning 7 & 11)

- La $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

- Egenverdier: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 9$.

- Egenvektorer: $\mathcal{B}_{1,2} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{B}_3 = \left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

- Her er $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = -3$, $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3 = 3$ og $\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = -2$.

Gram–Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{41} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{205}\begin{bmatrix} 70 \\ -35 \\ 210 \end{bmatrix}$$

- Hvis A er diagonaliserbar kan vi skrive $A = PDP^{-1}$, der $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$.
- Hvis A er ortogonalt diagonaliserbar, kan vi velge egenvektorene slik at mengden

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

  er ortonormal. Da blir matrisen P ortogonal.

Teorem 6.6

En $n \times n$ matrise P er ortogonal hvis og bare hvis $P^{-1} = P^T$.

- Hvis A er ortogonalt diagonaliserbar, så er altså $A = PDP^T$.
- Da er

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A.$$

- Hvis A er ortogonalt diagonaliserbar, så er A symmetrisk.

Symmetriske matriser

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

Ikke-symmetriske matriser

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Spektralteoremet.
En $n \times n$ matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis A er symmetrisk.

Eksempel

- La $A = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 110 & -14 & 84 \\ -14 & 89 & -42 \\ 84 & -42 & 334 \end{bmatrix}$.

- Egenverdier: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 9$.

- Basis for egenrom: $\mathcal{B}_{1,2} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ og $\mathcal{B}_3 = \left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$.

- Her er $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = -3$, $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3 = 0$ og $\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = 0$.

Gram–Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$