MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 31

Ole Brevig

Matematisk institutt

8. november 2021

Repetisjon

- Spektraldekomposisjonen til en $n \times n$ symmetrisk matrise A er

$$A\mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \lambda_2(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

  hvor $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ er en ortonormal mengde.

- En kvadratisk form er en funksjon $Q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som kan uttrykkes på formen

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x}$$

  hvor A er en symmetrisk matrise.

- Kombinerer vi disse får vi den sjarmerende formelen

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_1)^2 + \lambda_2(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_n)^2.$$

Oppgave 7.2.10. (Forelesning 30)

- Den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$ har matrise $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.
- Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -5$. Da er altså Q en indefinitt kvadratisk form.
- Det finnes en ortogonal matrise P slik at om $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så er

$$Q(\mathbf{x}) = 5y_1^2 - 5y_2^2.$$

Spørsmål.

(a) Hva er $\max\{Q(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1\}$?

(b) Hva er $\min\{Q(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1\}$?

Oppgave 7.3.2.

Finn et ortogonalt variabelbytte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ som transformerer den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x}$ til den kvadratiske formen $R(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \bullet D\mathbf{y}$ der

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 11y_1^2 + 2y_2^2 = R(\mathbf{y}).$$

Oppgave 7.3.4.

(a) Finn maksimum av $Q(\mathbf{x})$ under begrensningen $\|\mathbf{x}\| = 1$.

(b) Finn en enhetsvektor $\mathbf{u}$ hvor maksimum i (a) antas.

(c) Finn maksimum av $Q(\mathbf{x})$ under begrensningene $\|\mathbf{x}\| = 1$ og $\mathbf{x} \bullet \mathbf{u} = 0$, hvor $\mathbf{u}$ er vektoren fra (b).