MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 33

Ole Brevig

Matematisk institutt

11. november 2021

Teorem 7.10 (Singulærverdi-dekomposisjon)

La A være en $m \times n$ matrise med $\operatorname{rank}(A) = r$*. Det finnes*

- *en $m \times n$ "diagonal" matrise Σ med de r første singulærverdiene til A på "diagonalen",*
- *en $m \times m$ ortogonal matrise U og*
- *en $n \times n$ ortogonal matrise V*

slik at

$$A = U\Sigma V^T.$$

Oppskrift på singulærverdi-dekomposisjon.

1. Finn en ortogonal diagonalisering av $A^T A$.
   - Egenverdiene er $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$.
   - Ortonormal mengde egenvektorer er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.
2. La $V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$.
3. Singulærverdiene til A er $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
   - La D være diagonalmatrisen med de r singulærverdiene som ikke er lik 0 på diagonalen.
   - La Σ være $m \times n$ matrisen konstruert ved å utvide D med nuller.
4. La $\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} A\mathbf{u_j}$ for $j = 1, \ldots, r$. Hvis $r < m$, velg $\mathbf{u}_j$ for $j > r$ slik at

   $$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$$

   er ortogonal.
5. Da er $A = U\Sigma V^T$.

Eksamen 2014: Oppgave 3

La $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Beregn $B = A^T A$. Bestem deretter egenverdiene til B og angi de tilhørende egenrommene.

(b) Finn en singulærverdi-dekomposisjon for A.

(c) La E være mengden av punkter (x_1, x_2) i x_1x_2-planet som oppfyller den kvadratiske ligningen

$$6x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 = 35.$$

Begrunn at E er en ellipse og lag en skisse av E i x_1x_2-planet.