MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 35

Ole Brevig

Matematisk institutt

17. november 2021

Kapittel 5

Veldig eksamensrelevant 2016–2020: 17%

5.1 Egenverdier og egenvektorer.
5.2 Den karakteristiske ligningen.
5.3 Diagonalisering.

Eksamensrelevant 2016–2020: 21%

5.4 Egenvektorer og lineære transformasjoner.
5.5 Komplekse egenverdier.
5.6 Diskrete dynamiske systemer.
5.7 Anvendelser på differensialligninger.

Ikke eksamensrelevant 2016–2020: 0%

5.8 Iterative estimater for egenverdier.
5.9 Anvendelser på Markov-kjeder.

Kapittel 5.1–5.3

1. Hvordan regner vi ut egenverdiene til A?
2. Hvordan finner vi egenvektorene til A?
3. Når er A diagonaliserbar?

- For å regne ut egenverdiene til A løser vi den karakteristiske ligningen

$$0 = \det(A - \lambda I).$$

- Gitt en egenverdi λ er egenvektorene løsninger av ligningen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Vi er spesielt interessert i lineært uavhengige løsninger.

Teorem 5.5 (Diagonaliseringsteoremet)

En $n \times n$ matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.

Enhver diagonalisering $A = PDP^{-1}$ er gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

hvor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en lineært uavhengig mengde egenvektorer for A og

$$A\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

for $j = 1, 2, \dots, n$.

For praktisk regning er følgende resultat ofte nyttig.

Teorem 5.2

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ er egenvektorer for forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, så er mengden

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

lineært uavhengig.

Ved å kombinere Teorem 5.2 og Teorem 5.5 får vi følgende:

Teorem 5.6

Dersom en $n \times n$ matrise A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Obs! Til forskjell fra Teorem 5.5 gir Teorem 5.6 bare en tilstrekkelig betingelse.

Eksamen 2018: Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.

(b) Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.

Kapittel 5.4

- Anta at V er et vektorrom med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. La T være en lineærtransformasjon på V, det vil si en avbildning $T\colon V \to V$ som oppfyller

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2).$$

- Hvis $\mathbf{v}$ er en vektor i V finnes det unike tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n.$$

  Koordinattransformasjonen er $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Vi kan enkode T i en $n \times n$ matrise

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

  hvor nå $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ hvis og bare hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, hvor $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ og $\mathbf{y} = [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.

- La $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Da er

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

  invertibel.
- Hvis vi betrakter $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gitt ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og $A = PBP^{-1}$, så er

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = B.$$

- Altså er A diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$ slik at $[T_A]_{\mathcal{B}}$ er en diagonalmatrise.
- Dette gjør at variabelbyttet

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

  kan være nyttig når vi studerer dynamiske systemer og differensialligninger.

Kapittel 5.6–5.7

La A være en $n \times n$ matrise.

- Et diskret dynamisk system er gitt ved $\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}. \end{cases}$
- Et system av lineære differensialligninger er gitt ved $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}. \end{cases}$

Hvis A har diagonalisering $A = PDP^{-1}$ kan vi gjøre variabelbyttet

- $\mathbf{y}_k = P^{-1}\mathbf{x}_k$ og skrive om det dynamiske systemet til $\begin{cases} \mathbf{y}_{k+1} = D\mathbf{y}_k, \\ \mathbf{y}_0 = P^{-1}\mathbf{c}. \end{cases}$
- $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ og skrive om systemet av differensialligninger til $\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(0) = P^{-1}\mathbf{c}. \end{cases}$

Eksamen 2018: Oppgave 2

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$ er egenvektorer for A. Vis også at 2 er en egenverdi for A.

(b) Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn egenverdiene til A^{10}.

(c) Løs systemet av lineære differensialligninger

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = (1, -1, 1). \end{cases}$$

```
>> C

C =

    -1    -1    -1     1
     1     0     1    -1
     0     1     1     1

>> rref(C)

ans =

     1     0     0    -2
     0     1     0     0
     0     0     1     1
```

Figur: MATLAB-vedlegg fra Eksamen 2018.

Kapittel 5.5

- Ikke alle reelle matriser har reelle egenverdier.
- Den geometriske effekten av matrisen

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  på en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ er en rotasjon med θ radianer.
- Den karakteriske ligningen er

$$0 = \det(R_\theta - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta$$

  og løsningene er $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$.
- Vi regne ut komplekse egenvektorer til komplekse egenverdier og bruke disse for å analysere reelle dynamiske systemer eller løse systemer av differensialligninger.

Spørsmål