MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 37

Ole Brevig

Matematisk institutt

22. november 2021

Kapittel 7

Veldig eksamensrelevant 2016–2020: 8%

7.1 Diagonalisering av symmetriske matriser.

Eksamensrelevant 2016–2020: 10%

7.2 Kvadratiske former.

7.3 Begrenset optimalisering.

7.4 Singulærverdi-dekomposisjon.

Kapittel 7.1

- En $n \times n$ matrise
$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$
kalles ortogonal dersom $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.
- Hvis P er ortogonal, så er $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ og $P^{-1} = P^T$.
- En matrise A kalles ortogonalt diagonaliserbar hvis det finnes en diagonal matrise D og en ortogonal matrise P slik at $A = PDP^T$.

Teorem 7.2 (Spektralteoremet)

En $n \times n$ matrise A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis A er symmetrisk.

Symmetriske matriser.

En matrise A kalles symmetrisk dersom $A^T = A$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

Teorem 7.1

La A være en symmetrisk matrise. Hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er egenvektorer til A med forskjellige egenverdier, så er $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Når vi skal ortogonalt diagonalisere en symmetrisk matrise er det altså egenvektorene med samme egenverdi vi må være forsiktige med.

Oppskrift på ortogonal diagonalisering.

La A være en $n \times n$ matrise.

1. Er A symmetrisk?
   - Hvis JA, så er A ortogonalt diagonaliserbar.
   - Hvis NEI, så er ikke A ortogonalt diagonaliserbar.
2. Finn egenverdier og egenvektorer på vanlig måte.
3. Hvis egenverdien λ har > 1 lineært uavhengige egenvektorer, bruk Gram–Schmidt.
4. Normaliser egenvektorene slik at $\|\mathbf{u}_j\| = 1$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
5. Definer D og P på vanlig måte for diagonalisering.

Eksamen 2017: Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ er en egenvektor til A. Finn alle egenverdiene til A.

(b) Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A.

Kapittel 7.2–7.3

- En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ er

$$Q(\mathbf{x}) = c_{1,1}\,x_1^2 + c_{2,2}\,x_2^2 + \cdots + c_{n,n}\,x_n^2 + c_{1,2}\,x_1x_2 + c_{1,3}\,x_1x_3 + \cdots + c_{n-1,n}\,x_{n-1}x_n.$$

- Det finnes en unik symmetrisk matrise A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x}$.
- Vi kan bruke en ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$ til å analysere Q.
- To ekvivalente metoder:
  1. Ved variabelbytte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ blir $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ og

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \bullet D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

  2. Ved å bruke spektraldekomposisjonen til A er

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \lambda_1(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_1)^2 + \lambda_2(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_n)^2, \\ \|\mathbf{x}\|^2 &= \quad (\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_1)^2 + \quad (\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + \quad (\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}_n)^2. \end{aligned}$$

Definisjon

La Q være en kvadratisk form. Vi sier at Q er

1. positivt definitt dersom $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
2. negativt definitt dersom $Q(\mathbf{x}) < 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
3. indefinitt Q tar både positive og negative verdier.

Teorem 7.5

La Q være en kvadratisk form med matrise A. Da er Q

1. *positivt definitt hvis og bare hvis alle egenverdiene til A er positive,*
2. *negativt definitt hvis og bare hvis alle egenverdiene til A er negative,*
3. *indefinitt hvis og bare A har både positive og negative egenverdier.*

Hvis Q er en kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$, kan dette brukes til å klassifisere kjeglesnittet

$$Q(\mathbf{x}) = c$$

som en ellipse eller en hyperbel.

- La Q være en kvadratisk form med matrise A og la

$$M = \max\{Q(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1\} \qquad \text{og} \qquad m = \min\{Q(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

- Hvis egenverdiene til A er

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

  så er $M = \lambda_1$ og $m = \lambda_n$.
- Det finnes også ekstramalproblemer som gir de resterende egenverdiene til A.

Eksamen 2017: Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ er en egenvektor til A. Finn alle egenverdiene til A.

(b) Begrunn at A er ortogonalt diagonaliserbar. Bestem deretter en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D som gir en ortogonal diagonalisering av A.

(c) Betrakt den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3.$$

Finn en ortogonal 3×3 matrise P slik at variabelskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transformerer $Q(\mathbf{x})$ til en kvadratisk form uten kryssledd. Angi den nye kvadratiske formen og finn maksimum av $Q(\mathbf{x})$ når $\mathbf{x}$ varierer gjennom enhetssfæren $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Kapittel 7.4

- La A være en $m \times n$ matrise. Da er
$$A^T A$$
en symmetrisk $n \times n$ matrise med egenverdier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.
- Singulærverdiene til A er tallene $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Teorem 7.10 (Singulærverdi-dekomposisjon)

La A være en $m \times n$ matrise med $\operatorname{rank}(A) = r$. Det finnes

- *en $m \times n$ "diagonal" matrise Σ med de r første singulærverdiene til A på "diagonalen",*
- *en $m \times m$ ortogonal matrise U og*
- *en $n \times n$ ortogonal matrise V*

slik at
$$A = U\Sigma V^T.$$

Oppskrift på singulærverdi-dekomposisjon.

La A være en $m \times n$ matrise.

1. Finn en ortogonal diagonalisering av $A^T A$.
   - Egenverdiene er $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.
   - Ortonormal mengde egenvektorer er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.
2. La $V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$.
3. Singulærverdiene til A er $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.
   - La D være diagonalmatrisen med de r singulærverdiene som ikke er lik 0 på diagonalen.
   - La Σ være $m \times n$ matrisen konstruert ved å utvide D med nuller.
4. La $\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} A\mathbf{v}_j$ for $j = 1, \ldots, r$. Hvis $r < m$, velg $\mathbf{u}_j$ for $j > r$ slik at

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$$

   er ortogonal.

5. Da er $A = U\Sigma V^T$.

Spørsmål