MAT1120 Lineær algebra: Forelesning 9

Ole Brevig

Matematisk institutt

9. september 2021

Forrige forelesning

1. Egenverdiene til en matrise A er løsningene til den karakteristiske ligningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

2. Hvis det finnes en invertibel matrise P slik at

$$A = PBP^{-1},$$

så har A og B de samme egenverdiene — algebraisk og geometrisk multiplisitet.

Dagens mål

- Når kan vi faktorisere

$$A = PDP^{-1}$$

der P er en invertibel matrise og D er en diagonalmatrise?

Repetisjon

- La A være en $n \times n$ matrise og la λ være en egenverdi til A.
- Den algebraiske multiplisiteten til λ er ordenen til roten λ i det karakteriske polynomet

$$\det(A - \lambda I).$$

- Den geometriske multiplisiteten til λ er dimensjonen til egenrommet, det vil si

$$\operatorname{nullity}(A - \lambda I) = \dim \operatorname{Nul}(A - \lambda I).$$

- Siden λ er en egenverdi er begge multiplisitetene > 0.
- Den geometriske multiplisiteten er mindre enn eller lik den algebraiske multiplisiteten.

Eksamen H2016: Oppgave 4

La A være 3×3 matrisen gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har en egenverdi $\lambda_2 = 1$, og $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 6)$ er egenvektorer for A.

(a) Finn en egenvektor $\mathbf{v}_2$ for A tilhørende egenverdien λ_2. Bestem også egenverdiene for A som svarer til egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$.

(b) Begrunn at A er diagonaliserbar og angi en 3×3 invertibel matrise P og en 3×3 diagonalmatrise D som er slik at $A = PDP^{-1}$.

(c) Betrakt det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$. Anta at $\mathbf{x}_0 = (1, 0, -3)$. Begrunn at $\mathbf{x}_k$ konvergerer mot en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ når $k \to \infty$ og angi $\mathbf{x}$.

(d) Betrakt igjen det dynamiske systemet $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ der $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bestem *alle* startvektorene $\mathbf{x}_0$ som er slik at $\mathbf{x}_k$ vil konvergere mot nullvektoren når $k \to \infty$.

Oppsummering: Kapittel 5.1–5.3

1. En $n \times n$ matrise A har maksimalt n egenverdier som vi kan regne ut ved å løse den karakteristiske ligningen
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$
2. Hvis λ er en egenverdi til A så er egenvektorene de ikke-trivielle løsningene av
$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$
3. Vi kan skrive $A = PDP^{-1}$ hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer. Her har D egenverdiene til A på diagonalen og kolonnevektorene i P er egenvektorene til A.

Neste uke

5.9 Markovkjeder.

5.8 Iterative estimater for egenverdier og egenvektorer.

5.4 Egenverdier og egenvektorer for lineærtransformasjoner.