Gram-Schmidt prossessen

Øyvind Ryan

Matematisk Institutt, UIO

October 7, 2021

Forelesning 7/10

- Oblig 2 er lagt ut!
- I dag: Gjøre ferdig seksjon 6.3. Seksjon 6.4: Gram-Schmidt prossess for å konstruere en ortogonal basis

Info ny foredragsserie for programstudenter, Matematisk Institutt

I høst starter en ny foredragsserie kalt "Hva kan jeg bli, da?", der en av våre tidligere studenter kommer og snakker om studiene og karrieren sin, hvilke valg de er glade for at de gjorde, og hvilke valg som ikke var så lure. Foredraget varer omtrent en halvtime, og det blir god tid til å stille spørsmål etterpå.

- Første foredragsholder er Lars Andreas Tveiten, som i dag jobber i Bekk.
- Tid/sted: Torsdag 14. oktober kl 16:15 i Auditorium 1 i Vilhelm Bjerknes' hus.
- Pizza fra 16:00. Påmelding ikke nødvendig.

Hovedresultat

Teorem 11 (Gram-Schmidt prossess)
Gitt en basis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ for $W \subseteq V$. Definer

$$
\begin{array}{rlllll}
\mathbf{v}_1 = & \mathbf{x}_1 & & & & \\
\mathbf{v}_2 = & \mathbf{x}_2 & -\frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 & & & \\
\mathbf{v}_3 = & \mathbf{x}_3 & -\frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 & -\frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\mathbf{v}_p = & \mathbf{x}_p & -\frac{\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 & -\frac{\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 & \cdots & -\frac{\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{v}_{p-1} \rangle}{\langle \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_{p-1} \rangle}\mathbf{v}_{p-1}
\end{array}
$$

Da har vi at

- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er en ortogonal basis for W.
- For alle k er $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$

Ortonormal basis med Gram-Schmidt

Definerer vi $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|$ så kan dette omskrives til

$$
\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{v}_1 = & \mathbf{x}_1 & & & & \\
\mathbf{v}_2 = & \mathbf{x}_2 & -\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 & & & \\
\mathbf{v}_3 = & \mathbf{x}_3 & -\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 & -\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\mathbf{v}_p = & \mathbf{x}_p & -\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 & -\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 & \cdots & -\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_{p-1} \rangle \mathbf{u}_{p-1}
\end{array}
$$

$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ blir da en ortonormal basis for W.

Fra Gram-Schmidt til QR-faktorisering

Flytter vi termene med minus foran over til venstre side og setter $\mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|\mathbf{u}_k$ får vi

$$\begin{array}{ccccccc}
\|\mathbf{v}_1\|\mathbf{u}_1 & & & & & = & \mathbf{x}_1 \\
\langle\mathbf{x}_2,\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 & \|\mathbf{v}_2\|\mathbf{u}_2 & & & & = & \mathbf{x}_2 \\
\langle\mathbf{x}_3,\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 & +\langle\mathbf{x}_3,\mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2 & +\|\mathbf{v}_3\|\mathbf{u}_3 & & & = & \mathbf{x}_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 & +\langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2 & +\langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_3\rangle\mathbf{u}_3 & \cdots & +\|\mathbf{v}_p\|\mathbf{v}_p & = & \mathbf{x}_p
\end{array}$$

Venstresidene er søylene i:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
\|\mathbf{v}_1\| & \langle\mathbf{x}_2,\mathbf{u}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_3,\mathbf{u}_1\rangle & \cdots & \langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_1\rangle \\
0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle\mathbf{x}_3,\mathbf{u}_2\rangle & \cdots & \langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_2\rangle \\
0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \langle\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_3\rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_p\|
\end{bmatrix}$$

Høyresidene er søylene i:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p\end{bmatrix} = A$$

Oppsummering

Vi har utledet QR-faktoriseringen $A = QR$ med

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_p \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_p \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_1 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_p\| \end{bmatrix}$$

Merk:

- Hvert steg i Gram-Schmidt fyller inn en søyle i Q og R.
- Søylene i Q er ortonormale.
- R er øvretriangulær med positive diagonalelementer (så den er inverterbar). Siden R er inverterbar så har Q og A samme søylerom (se oppgave 24).

Dette beviser teorem 12 i boka.

Matlabkode

```
function [Q,R]=qrfact(A)
    [m,n]=size(A);
    Q=zeros(m,n); R=zeros(n);
    for k=1:n
        R(1:(k-1),k) = Q(:,1:(k-1))'*A(:,k);
        Q(:,k) = A(:,k) - Q(:,1:(k-1))*R(1:(k-1),k);
        R(k,k) = norm(Q(:,k));
        Q(:,k) = Q(:,k)/R(k,k);
    end
```

Pythonkode

```
from numpy import *

def qrfact(A):
    m,n=shape(A)
    Q=matrix(zeros((m,n))); R=matrix(zeros((n,n)))
    for k in range(n):
        R[:k,k] = Q[:,:k].T*A[:,k]
        Q[:,k] = A[:,k] - Q[:,:k]*R[:k,k]
        R[k,k] = linalg.norm(Q[:,k])
        Q[:,k] = Q[:,k]/R[k,k]
    return Q,R
```