Skalrprodukter og Indreprodukter

Øyvind Ryan

Matematisk Institutt, UIO

September 29, 2021

Skalarproduktet av **u** og **v** i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \cdots u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Vi sier at **u** og **v** er ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
Lengden/normen til **u**:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v_1^2} + \cdots + \mathbf{v_n^2}}$$

Avstanden mellom **u** og **v**:

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Egenskaper ved skalarproduktet

Teorem 1: La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og c en skalar. Da er

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = 0$.

Generalisering av skalarproduktet

Definisjon: Et indreprodukt i et vektorrom V er en funksjon

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

slik at (for $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorer i V, og c en skalar)

a. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
b. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
c. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
d. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, og $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = 0$.

Et vektorrom med et indreprodukt kalles også et indreproduktrom. Et indreproduktrom arver definisjoner fra skalarproduktet:

- $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- Lengden/normen til $\mathbf{u}$: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- Avstanden mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$: $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.