UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	Tirsdag 29 november, 2022
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	en Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1a

Finn en basis $\mathcal{B}$ for $\mathrm{Col}(A)$ som består av søyler i A. Skriv søyler i A som ikke er med i basisen $\mathcal{B}$ som lineære kombinasjoner av vektorene i $\mathcal{B}$. Hva er dimensjonen til $\mathrm{Nul}(A)$?

Løsning: Skriv $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$. Den reduserte trappeformen R til A, som er opgitt i Matlab-utskriften, har pivoter i kolonnene 1 og 2. Dette gir en basis $\mathcal{B} = \{a_1, a_2\}$ for $\mathrm{Col}(A)$.

De lineære avhengighetene mellom kolonnene i A er de samme som mellom kolonnene i R. Det følger at

$$a_3 = 2a_1 - a_2, \qquad a_4 = a_1 - a_2, \qquad a_5 = -a_1 + 2a_2.$$

Siden A er en 4×5 matrise, har vi

$$\dim \mathrm{Nul}(A) = 5 - \dim \mathrm{Col}(A) = 3.$$

(Fortsettes på side 2.)

1b

Vis at de to første radene i A danner en basis $\mathcal{C}$ for radrommet $\mathrm{Row}(A)$ til A.

Løsning: Vi ser at de to første radene ikke er multipler av hverandre, så er de lineært uavhengige. Siden

$$\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = 2,$$

danner de en basis for $\mathrm{Row}(A)$. (Vi kan også se at hvis b_1, b_2, b_3, b_4 er radene til A, da har vi $b_4 = b_3 = b_1 + b_2$.)

1c

For vektorene

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

regn ut koordinatvektorene $[v]_{\mathcal{B}}$ og $[w]_{\mathcal{C}}$.

Løsning: Vi ser at

$$v = 3a_1 + 5a_2, \qquad w = 2b_1 - b_2,$$

dvs

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [w]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2

La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2a

Finn en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Løsning: Det karakteristiske polynomet til A er

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 6 \\ 0 & -1-t \end{pmatrix} = (t-2)(t+1).$$

Vi ser at egenverdiene til A er 2 og -1. Tilsvarende egenvektorene er $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Det følger at vi kan ta

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

2b

Beregn A^{10}.

Løsning: Vi har

$$A^{10} = (PAP^{-1})^{10} = PA^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1024 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 2046 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3

Betrakt den kvadratiske formen $Q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$ på $\mathbb{R}^3$.

3a

Finn maksimum
$$M = \max_{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\|=1} Q(x),$$
og en vektor $x_0 \in \mathbb{R}^3$ slik at $\|x_0\| = 1$ og $Q(x_0) = M$.

Løsning: Den symmetriske matrisen til Q er

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til A er 6, 5, 2. Det følger (Teorem 6, §7.3, i boka) at $M = 6$ og $Q(x_0) = M$ for en enhetsvektor x_0 som er en egenvektor til A med egenverdi 6. Vi kan ta
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3b

La
$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$
Finn maksimum av Q på

$$\{v \in V : \|v\| = 1\}.$$

Løsning: Vi ser at

$$\{v \in V : \|v\| = 1\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1,\ v \perp x_0\}.$$

Det følger (Teorem 7, §7.3, i boka) at maksimum av Q på $\{v \in V : \|v\| = 1\}$ er 5.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4

Betrakt vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad opptil 2.

4a

Forklar hvorfor formelen

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

definerer et indreprodukt på $\mathbb{P}_2$.

Løsning: Se Example 2, §6.7, i boka. Hovedpoenget er at hvis $\langle p, p\rangle = 0$, da har vi $p(-1) = p(0) = p(-1) = 0$, og dette er mulig bare hvis $p = 0$, siden et polynom som ikke er null og har grad ≤ 2 kan ha maksimum to forskjellige røtter.

4b

Betrakt underrommet $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2$ av polynomer av grad opptil 1 og den ortogonale projeksjonen $Q\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ (m.h.p. indreproduktet definert ovenfor). For $p(t) = a + bt + ct^2$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$, har vi

$$Q(p) = \beta_0 + \beta_1 t$$

for noen $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$. Finn formler for β_0 og β_1.

Løsning: Vi kan finne en ortogonal basis for $\mathbb{P}_1$ og bruke den for å skrive en formel for Q. En annen mulighet er å observere at $y = \beta_0 + \beta_1 x$ er en minste kvadraters linje for punktene $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Dvs $\beta = \begin{pmatrix}\beta_0 \\ \beta_1\end{pmatrix}$ er en minste kvadraters løsning til

$$X\beta = y,$$

hvor

$$X = \begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix}p(-1) \\ p(0) \\ p(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a - b + c \\ a \\ a + b + c\end{pmatrix}.$$

Vi kan finne β ved å løse de assosierte normale likningene

$$X^T X\beta = X^T y.$$

Vi har

$$X^T X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a - b + c \\ a \\ a + b + c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a + 2c \\ 2b\end{pmatrix}.$$

Det følger at

$$\beta_0 = \frac{3a + 2c}{3}, \qquad \beta_1 = b.$$

(Fortsettes på side 5.)

4c

Beskriv alle polynomene p i $\mathbb{P}_2$ slik at 0 er punktet i $\mathbb{P}_1$ som er nærmest p (m.h.p. indreproduktet definert ovenfor).

Løsning: Punktet i $\mathbb{P}_1$ som er nærmest p er $Q(p)$. Derfor trenger vi å finne alle polynomene $p(t) = a + bt + ct^2$ slik at $Q(p) = 0$. Dette betyr at

$$\frac{3a + 2c}{3} = 0, \qquad b = 0.$$

Det følger at

$$p(t) = a - \frac{3a}{2}t^2 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 6.)

Matlab-utskrift.

```
>> A=[1 0 2 1 -1
0 -1 1 1 -2
1 -1 3 2 -3
1 -1 3 2 -3]

A =

     1     0     2     1    -1
     0    -1     1     1    -2
     1    -1     3     2    -3
     1    -1     3     2    -3

>> R=rref(A)

R =

     1     0     2     1    -1
     0     1    -1    -1     2
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```