UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1120 — Lineær algebra
Eksamensdag:	18.01.2023
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	en Matlab-utskrift finnes bakerst i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av tilsammen 10 deloppgaver slik at hver gir maksimum 10 poeng ved sensuren. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Du kan henvise til Matlab-utskriften når du finner det hensiktsmessig.

Oppgave 1

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I Oppgaver 1b og 1c betrakter vi $\mathbb{R}^3$ med prikkproduktet.

1a

Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$ som består av kolonner i A. Er A invertibel? Gi et argument for svaret ditt.

Løsning: Skriv $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Den reduserte trappeformen R til A, som er opgitt i Matlab-utskriften, har pivoter i kolonnene 1 og 2. Dette gir en basis $\{a_1, a_2\}$ for $\mathrm{Col}(A)$.

Selvfølgelig er A ikke invertibel fordi den ikke er kvadratisk.

1b

Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Løsning: Fra siste oppgave har vi basisen $\{a_1, a_2\}$ for $\mathrm{Col}(A)$. Vi bruker Gram-Schmidt metoden. Først tar vi $b_1 = a_1$. Etterpå definerer

$$b_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Dette gir en ortogonal basis $\{b_1, b_2\}$ for $\mathrm{Col}(A)$.

1c

Finn den ortogonale projeksjonen av

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

på $\mathrm{Col}(A)$. Beregn avstanden fra y til $\mathrm{Col}(A)$.

Løsning: Fra siste oppgave har vi den ortogonale basisen $\{b_1, b_2\}$ for $\mathrm{Col}(A)$. Projeksjonen av y på $\mathrm{Col}(A)$ er

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}(y) = \frac{y \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \frac{y \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2 = \frac{14}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avstanden fra y til $\mathrm{Col}(A)$ er

$$\|y - \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}(y)\| = \| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \| = \sqrt{21}.$$

Oppgave 2

Betrakt matrisen

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

for et reelt tall $\alpha \in \mathbb{R}$.

2a

Argumenter at A_α er diagonaliserbar for hver $\alpha > 0$. (Du trenger ikke finne en slik diagonalisering.)

Løsning: Vi regner ut egenverdier til A_α. Den karakteristiske likningen er

$$(1 - \lambda)^2 - \alpha = 1 - \alpha - 2\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Denne likningen har løsninger

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\alpha}.$$

For $\alpha > 0$ får vi to forskjellige reelle egenverdier og derfor er A_α diagonaliserbar.

(Fortsettes på side 3.)

2b

Er A_α diagonaliserbar for $\alpha = 0$? Gi et argument for svaret ditt.

Løsning: Anta at A_0 var diagonaliserbar. Vi har $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Da ville det være en invertibel matrise S med

$$A_0 = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men det er ikke sant og derfor kan ikke A_0 være diagonaliserbar.

Oppgave 3

La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3a

Finn en ortogonal diagonalisering VDV^T av matrisen A^TA.

Løsning: Vi har

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til A^TA er derfor $\lambda_1 = 5$ med egenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_2 = 2$ med egenvektor

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og $\lambda_3 = 0$ med egenvektor

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har $v_i \cdot v_j = 0$ for alle $i \neq j$ og $v_i \cdot v_i = 1$ for alle i. Derfor er

$$V = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

en ortogonal matrise med egenvektorer som søyler, og vi har

$$A^TA = VDV^T \qquad \text{med} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 4.)

3b

Hva er singulærverdiene til A? Finn en singulærverdi dekomposisjon $A = U\Sigma V^T$.

Løsning: Singulærverdiene til A er $\sigma_1 = \sqrt{5}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$, $\sigma_3 = 0$ som er kvadratroter av egenverdier til $A^T A$.

Vi regner ut vektorene

$$u_1 = \frac{Av_1}{\|Av_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$u_2 = \frac{Av_2}{\|Av_2\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi skal finne en normalisert vektor u_3 som er ortogonal til u_1 og u_2. Vi kunne bruke Gram-Schmidt prosessen, men det er lett å gjette (og sjekke) at

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er en slik vektor. Med disse vektorene definerer vi en ortogonal matrise

$$U = [u_1, u_2, u_3] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

og vi har en singulærverdi dekomposisjon

$$A = U\Sigma V^T,$$

med

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4

Betrakt vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad mindre eller lik 2 og differensialoperatøren $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gitt ved

$$(Tp)(t) = 3p(t) + tp'(t) + p''(t).$$

(Fortsettes på side 5.)

4a

Vis at T er en lineær transformasjon.

Løsning: For hvert $\lambda \in \mathbb{R}$ og polynomer $p, q \in \mathbb{P}_2$ har vi

$$\begin{aligned}(T(\lambda p + q))(t) &= 3(\lambda p + q)(t) + t(\lambda p + q)'(t) + (\lambda p + q)''(t) \\ &= 3\lambda p(t) + 3q(t) + t\lambda p'(t) + tq'(t) + \lambda p''(t) + q''(t) \\ &= \lambda(Tp)(t) + (Tq)(t).\end{aligned}$$

Dette viser at T er en lineær transformasjon.

4b

Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ til T med hensyn på standardbasisen $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ med

$$\begin{aligned}p_0(t) &= 1 \\ p_1(t) &= t \\ p_2(t) &= t^2.\end{aligned}$$

Løsning: Vi regner ut at

$$\begin{aligned}(Tp_0)(t) &= 3p_0(t) + tp_0'(t) + p_0''(t) = 3 = 3p_0(t). \\ (Tp_1)(t) &= 3p_1(t) + tp_1'(t) + p_1''(t) = 3t + t = 4p_1(t). \\ (Tp_2)(t) &= 3p_2(t) + tp_2'(t) + p_2''(t) = 3t^2 + 2t^2 + 2 = 5p_2(t) + 2p_0(t).\end{aligned}$$

Dette viser at

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4c

Finn alle $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at differensiallikningen

$$3p(t) + tp'(t) + p''(t) = \lambda p(t) \qquad (\text{for alle } \ t \in \mathbb{R})$$

har en løsning $p \in \mathbb{P}_2$ som ikke er null. Finn en løsning som ikke er null for hver slik λ.

Løsning: Differensiallikningen kan skrives som

$$(Tp)(t) = \lambda p(t).$$

Vi ser at hvis $p \in \mathbb{P}_2$ oppfyller denne likningen og er ikke null, så er λ en egenverdi til T. Vi vet at T og $[T]_{\mathcal{B}}$ har de samme egenverdier. Fordi $[T]_{\mathcal{B}}$ er øvre triangulær, vet vi at egenverdiene er de diagonale koeffisientene $3, 4, 5$.

(Fortsettes på side 6.)

Det er lett å se at

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [p_0]_{\mathcal{B}}$$

er en egenvektor av $[T]_{\mathcal{B}}$ med egenverdi $\lambda_1 = 3$. Det er også lett å se at

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [p_1]_{\mathcal{B}}$$

er en egenvektor av $[T]_{\mathcal{B}}$ med egenverdi $\lambda_2 = 4$. Til slutt kan vi regne ut (eller se det direkte fra matrisen) at

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [p_0 + p_2]_{\mathcal{B}}$$

er en egenvektor med egenverdi $\lambda_3 = 5$. Vi konkluderer at p_0, p_1 og $p_0 + p_2$ er løsninger til differensiallikningen med $\lambda = 3, 4, 5$, henholdsvis.

Husk Matlab-utskriften på neste side!

(Fortsettes på side 7.)

Matlab-utskrift.

```
>> A=[2 0 -2 4
3 2 3 4
1 1 2 1]

A =

     2     0    -2     4
     3     2     3     4
     1     1     2     1

>> R=rref(A)

R =

     1     0    -1     2
     0     1     3    -1
     0     0     0     0
```